# 5 Symmetrien und Erhaltungsgrößen

Bsp: konservative Zentralkraft, $N=1$

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2\right) - V(r)$$

$\varphi$ zyklisch $\Rightarrow$ $p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = l_z = \text{const}$

aber: auch $l_x, l_y = \text{const}$ (Wahl der z-Achse war frei)

Kartesische Koordinaten:

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - V(r)$$

keine Koordinate zyklisch

aber: $\vec{l} = \text{const}$

## 5.1 Noether-Theorem

E. Noether (qualitativ):

Die Invarianz von $L$ unter einem Satz kontinuierlicher Transformationen führt zu Erhaltungsgrößen!

Bsp.: Invarianz von L unter Drehungen
(3-parametrige kontinuierliche Trsf. gruppe)
$\rightarrow \vec{l} = \text{const}$ (3 Erhaltungsgrößen)

Diskussion:

- Problem: Wie findet man die Erhaltungsgrößen?
(→ Noether-Theorem)

- Invarianz unter Transformation = Symmetrie
Noether:
kontinuierliche Symmetrien → Erhaltungsgrößen
(von L)

- Symmetrien von L ← "a priori"
(besser: empirische aber grundlegende Tatsachen)
Symmetrieprinzipien
(Bsp.: Homogenität des Raums)

s. u.

↑
Charakter eines speziellen Problems
(Bsp. kons. Zentralkraft)

- Symmetrien / Erhaltungsgrößen bekannt
→ starke Einschränkungen für die Form von L!

betrachte konservatives System (bzw. System mit generalisiertem Potenzial $\mathcal{U}(q, \dot{q}, t)$) mit holonomen ZB

$$L = L(q, \dot{q}, t) \qquad q = (q_1, \ldots, q_f)$$

gegeben sei

<u>Punkttransformation</u> $T(\alpha): q \longmapsto q'$

$$q_n = q_n(q'_1, \ldots, q'_f, t, \alpha) = q_n(q', t, \alpha)$$

mit <u>kontinuierlichem Parameter</u> $\alpha$ und

$$q_n(q', t, \alpha)\Big|_{\alpha=0} = q'_n \qquad \forall n$$

---

<u>Bsp</u>: Drehung um z-Achse

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{r}\,'$$

also: $\vec{r} = \vec{r}(\vec{r}\,', \cancel{t}, \varphi)$ (Parameter $\varphi$ kontinuierlich)

und $\vec{r}(\vec{r}\,', \cancel{t}, \varphi = 0) = \vec{r}\,'$

oft: Transformations<u>gruppe</u> mit kont. Parameter d.h. Lie-Gruppe → infinitesimale Transformation ausreichend

Noether: Invarianz von L unter <u>infinites</u>. Transf. liefert Erhaltungsgröße hier z.B.: infinitesimale Drehung um Winkel $d\varphi$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 & -d\varphi & 0 \\ d\varphi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{r}\,' = \vec{r}\,' + d\varphi \begin{pmatrix} -y' \\ x' \\ 0 \end{pmatrix}$$

infinitesimale Drehung (Betrag $d\varphi = |d\vec{\varphi}|$, Richtung der Drehachse: $d\vec{\varphi}/|d\vec{\varphi}|$):

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + d\vec{\varphi} \times \vec{r}\,' \qquad \left(\text{oben: } d\vec{\varphi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d\varphi \end{pmatrix}\right)$$

<u>Bsp:</u> Translation

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}_0$$

3 kontinuierliche Parameter: $x_0, y_0, z_0$

<u>Bsp:</u> Punktspiegelung

$$\vec{r} = -\vec{r}\,' \qquad \text{nicht kontinuierlich!}$$

<u>Bsp:</u> Permutation der Koordinatenachsen

$$x_j = x'_{j-1} \qquad j = 2, \ldots, 3N$$
$$x_1 = x'_{3N} \qquad \text{nicht kontinuierlich!}$$

$\rightarrow$ keine Erhaltungsgröße (nach Noether) beachte:

$$q_n = q_n(q', t, \alpha) \quad \text{mit} \quad q_n(q', t, \alpha=0) = q_n'$$

impliziert:

$$\dot q_n = \sum_m \frac{\partial q_n}{\partial q'_m}(q', t, \alpha)\cdot \dot q'_m + \frac{\partial q_n}{\partial t}(q', t, \alpha)$$

$$= \dot q_n(q', \dot q', t, \alpha)$$

$$\text{mit} \quad \dot q_n(q', \dot q', t, \alpha)\Big|_{\alpha=0} = \sum_m \delta_{nm}\, \dot q'_m + 0$$

also:

$$\dot q_n(q', \dot q', t, \alpha=0) = \dot q'_n$$

---

Lagrange-Funktion in neuen Koordinaten

$$L'(q', \dot q', t, \alpha) = L\big(q(q', t, \alpha), \dot q(q', \dot q', t, \alpha), t\big)$$

unterschiedliche funktionale Abhängigkeiten
(hier korrekterweise mit unterschiedlichen
Symbolen bezeichnet)

$L(q,\dot q,t)$ ist <u>invariant unter $T(\alpha)$ $\forall\alpha$</u>, falls

$$L'(q',\dot q',t,\alpha) = L'(q',\dot q',t,\alpha=0)$$

(d.h. funktionale Gestalt unabhängig von $\alpha$)

$$= L(q(q',t,\alpha=0),\dot q(q',\dot q',t,\alpha=0),t)$$

$$= L(q',\dot q',t)$$

(d.h. funktionale Gestalt gleich der von $L(q,\dot q,t)$)

---

Konsequenz der Invarianz?

es gilt (insbesondere)

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} L'(q',\dot q',t,\alpha)\Big|_{\alpha=0} = 0 \qquad (*)$$

– Lie-Gruppen: Invarianz bei $\alpha=0$ liefert bereits sämtliche Informationen

Umformulierung von (*) als Erhaltungssatz:

$$0 = \frac{\partial L'}{\partial\alpha} = \frac{d}{d\alpha} L(q(q',t,\alpha),\dot q(q',\dot q',t,\alpha),t)$$

$$= \sum_n \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_n}}_{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_n}} \cdot \frac{\partial q_n}{\partial\alpha} + \sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot q_n} \underbrace{\frac{\partial \dot q_n}{\partial\alpha}}_{\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{d}{dt}q_n = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\alpha}q_n}$$

$$= \sum_n \left[ \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \right) \frac{\partial q_n}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial q_n}{\partial \alpha} \right) \right]$$

$$= \sum_n \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \frac{\partial q_n}{\partial \alpha} \right)$$

$$= \frac{d}{dt} \left( \sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \frac{\partial q_n}{\partial \alpha} \right) \qquad \text{alles Funktionen von } (q', \dot{q}', t, \alpha)$$

also: (Noether-Theorem)

$$\boxed{L \text{ invariant unter } T(\alpha) \implies \sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \frac{\partial q_n}{\partial \alpha} \bigg|_{\alpha=0} = \text{const}}$$

---

<u>Bsp</u>: Zentralkraft, $L$ in kartesischen Koordinaten

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - V(r) = L(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$$

$$\vec{r} = D_\varphi \vec{r}' = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x' \cos\varphi - y' \sin\varphi \\ x' \sin\varphi + y' \cos\varphi \\ z' \end{pmatrix}$$

$L$ ist invariant unter Drehungen um $z$-Achse:

$$L'(\vec{r}', \dot{\vec{r}}', \varphi) = L(D_\varphi \vec{r}', D_\varphi \dot{\vec{r}}') = L(\vec{r}', \dot{\vec{r}}')$$

offensichtlich

also eine Erhaltungsgröße:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\bigg|_{\varphi=0} = m\dot{\vec{r}} \cdot \begin{pmatrix} -x'\sin\varphi - y'\cos\varphi \\ x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}\Bigg|_{\varphi=0}$$

$$= m\dot{\vec{r}} \begin{pmatrix} -y' \\ x' \\ 0 \end{pmatrix}\Bigg|_{\varphi=0} = m \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= m(x\dot{y} - y\dot{x}) = m(\vec{r} \times \dot{\vec{r}})_z = L_z = \text{const}$$

---

Bsp: $q_n$ zyklisch in $L(q, \dot{q}, t)$

betrachte $q_n = q_n' + \alpha$

es gilt $L'(q', \dot{q}', t, \alpha) = L(q(q', t, \alpha), \dot{q}(q', \dot{q}', t, \alpha), t)$

$= L(q_1', \ldots, q_n' + \alpha, \ldots, q_f', \dot{q}, t)$

$= L(q', \dot{q}', t)$

$q_n$ zyklisch

also $L$ invariant

also

$$\text{const} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \cdot \frac{\partial q_n}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \cdot 1 = p_n$$

Erweiterung des Noether-Theorems:

$T(\alpha)$ mit $q_n = q_n(q', t, \alpha)$ heißt
<u>Symmetrietransformation</u>, falls

$$L'(q', \dot{q}', t, \alpha) \equiv L(q(q', t, \alpha), \dot{q}(q', \dot{q}', t, \alpha), t)$$

$$= \underbrace{L'(q', \dot{q}', t, \alpha=0)}_{L(q', \dot{q}', t)} + \frac{d}{dt}\Lambda(q', t, \alpha)$$

für eine beliebige Funktion $\Lambda = \Lambda(q', t, \alpha)$

jetzt gilt:

$$0 = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(L'(q', \dot{q}', t, \alpha) - \frac{d}{dt}\Lambda(q', t, \alpha)\right)$$

$$= \sum_n \left(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_n}}_{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}} \frac{\partial q_n}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \underbrace{\frac{\partial \dot{q}_n}{\partial \alpha}}_{\frac{d}{dt}\frac{\partial q_n}{\partial \alpha}}\right) - \underbrace{\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{d}{dt}\Lambda(q', t, \alpha)}_{\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\alpha}\Lambda}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}\frac{\partial q_n}{\partial \alpha} - \frac{\partial \Lambda}{\partial \alpha}\right)$$ speziell auch für $\alpha = 0$

also (Noether-Theorem):

$T(\alpha)$ Symmetrietransformation $\Rightarrow$

$$\boxed{\left.\sum_n \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}\frac{\partial q_n}{\partial \alpha}\right) - \frac{\partial \Lambda}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = \text{const}}$$

Bsp: Teilchen in homogenen und statischem elektrischen Feld $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 = \text{const}$

$$\vec{F} = q\,\vec{E}_0 = \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\left(q\,\vec{E}_0\,\vec{r}\right) \qquad V(\vec{r}) = -q\,\vec{E}_0\,\vec{r}$$

somit

$$L(\vec{r},\dot{\vec{r}}) = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^{\,2} + q\,\vec{E}_0\,\vec{r}$$

betrachte Translation

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}_0$$

es gilt

$$L'(\vec{r}\,',\dot{\vec{r}}\,',\vec{r}_0) = L(\vec{r}\,'+\vec{r}_0,\dot{\vec{r}}\,')$$

$$= \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}\,'^{2} + q\,\vec{E}_0(\vec{r}\,'+\vec{r}_0)$$

$$= L(\vec{r}\,',\dot{\vec{r}}\,') + q\,\vec{E}_0\,\vec{r}_0 \qquad (L \text{ nicht inv.!})$$

$$= L(\vec{r}\,',\dot{\vec{r}}\,') + \frac{d}{dt}\underbrace{\left(q\,\vec{E}_0\,\vec{r}_0\,t\right)}_{\Lambda(\cancel{\vec{r}\,'},\,t,\,\vec{r}_0)}$$

Translation ist Symmetrietransformation!
also 3 Erhaltungsgrößen:

$$\text{const} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}}\frac{\partial \vec{r}}{\partial x_{0j}} - \frac{\partial \Lambda}{\partial x_{0j}}\bigg|_{x_{0j}=0} \qquad \forall j = 1,2,3$$

$$= m\dot{\vec{r}}\cdot\vec{e}_j - q\,\vec{E}_0\,\vec{e}_j\,t$$

d.h. $m\dot{\vec{r}} - q\,\vec{E}_0\,t = \text{const}$

nur noch DGL 1. Ordnung!

## 5.2 Symmetrieprinzipien

fundamentale Erfahrungstatsachen:

Der Raum ist homogen und isotrop

Die Zeit ist homogen

Äquivalenz gegeneinander bewegter Inertialsysteme

$\Downarrow$ (für isolierte Systeme)

Bewegungsgleichungen (L II) sind forminvariant unter Galilei-Transformationen

$\Updownarrow$ (L II bzgl. $L(x,\dot{x},t)$ $\Leftrightarrow$ L II bzgl. $L'(x',\dot{x}',t)$)

Galilei-Transformationen sind mechanische Eichtransformationen

$$\left( L'(x',\dot{x}',t) = L(x(x',t), \dot{x}(x',\dot{x}',t), t) + \frac{d}{dt}\Lambda(x',t) \right)$$

$\Updownarrow$

Beweis $\Uparrow$ : s.o.
Beweis $\Downarrow$ : s.u., Ham.-Prinzip

Galilei-Transformationen sind Symmetrietransformationen

(Sym.-Tr. sind Punkt-Tr., mech. Eich-Tr. sind allgemeiner)

$\Downarrow$ (Noether-Theorem)

Erhaltungsgrößen

Galilei-Transformationen sind kont. Transformationen

10-parametrige Lie-Gruppe

10 Erhaltungsgrößen

betrachte isoliertes $N$-Teilchen-System

$$L(\vec r_1,\dots,\vec r_N,\dot{\vec r}_1,\dots,\dot{\vec r}_N,\cancel{t}) = \sum_i \frac{m_i}{2}\dot{\vec r}_i^{\,2} - \frac{1}{2}\sum_{ij}{}' V(|\vec r_i-\vec r_j|)$$

Galilei-Transformation

$$\vec r_i = \vec r_i(\vec r_1{}',\dots,\vec r_N{}',t,\alpha) = \vec r_i(\vec r_j{}',t,\alpha)$$

10 Parameter

damit

$$L'(\vec r_1{}',\dots,\vec r_N{}',\dot{\vec r}_1{}',\dots,\dot{\vec r}_N{}',t,\cancel{\alpha})$$

und (Galileisches Relativitätsprinzip)

$$L'(\vec r_i{}',\dot{\vec r}_i{}',t,\alpha) = L(\vec r_i{}',\dot{\vec r}_i{}') + \frac{d}{dt}\Lambda(\vec r_i{}',t,\alpha)$$

---

## 1) Homogenität des Raums

Translation $\vec r_i = \vec r_i{}' + \vec r_0 \qquad i=1,\dots,N$

oder $x_{il} = x_{il}' + x_{0l} \qquad i=1,\dots,N \quad l=1,2,3$

$L$ offensichtlich invariant unter Translationen

Noether:

$$\text{const} = \sum_{il}\frac{\partial L}{\partial \dot x_{il}}\frac{\partial x_{il}}{\partial x_{0l'}} = \sum_{i,l} m_i\dot x_{il}\cdot\delta_{ll'} = \sum_i m_i\dot x_{il'}$$

oder $\sum_i m_i\dot{\vec r}_i = \text{const}$

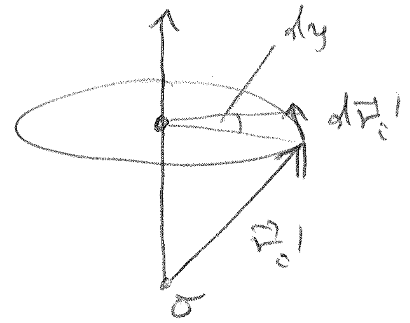
$\boxed{\text{Gesamtimpuls } \vec P = \text{const}}$ (für isolierte Systeme)

## 2) Isotropie des Raums

Drehung $\vec r_i = D^T \vec r_i\,'$ $\quad (\vec r_i\,' = D \cdot \vec r_i)$

bzw. (Lie-Gruppe) infinitesimale Drehung

Winkel $d\varphi$, Achse $d\vec\varphi / |d\vec\varphi|$)




$$\vec r_i = \vec r_i\,' + d\vec\varphi \times \vec r_i\,'$$

oder

$$x_{il} = x'_{il} + \sum_{mn} \varepsilon_{lmn}\, d\varphi_m\, x'_{in}$$

$l, m, n = 1, 2, 3$

$\varepsilon_{lmn}$ total antisymm.

L offensichtlich invariant unter Drehungen

Noether:

$$\text{const} = \sum_{i,l} \frac{\partial L}{\partial \dot x_{il}} \frac{\partial x_{il}}{\partial \varphi_m}\Bigg|_{d\vec\varphi = 0} = \sum_{i,l} p_{il} \sum_n \varepsilon_{lmn}\, x'_{in}\Bigg|_{d\vec\varphi = 0}$$

$$= \sum_{iln} \varepsilon_{mnl}\, x_{in}\, p_{il} = \sum_i (\vec r_i \times \vec p_i)_m = L_m \quad \forall m$$

$$\boxed{\text{Gesamtdrehimpuls } \vec L = \text{const}}$$

Bem: gültig für beliebige Wahl des Ursprungs!

also folgt

$$\text{const} = \vec L\,' = \sum_i m_i (\vec r_i + \vec r_0) \times (\dot{\vec r}_i + \cancel{\dot{\vec r}_0})$$

$$= \vec L + \vec r_0 \times \vec P \quad \forall \vec r_0$$

d.h. $\vec P = \text{const}$ (s.o.)

# 3) Äquivalenz gegeneinander bewegter IS

spezielle Galilei-Transformation

$$\vec r_i = \vec r_i' + \vec v_0 t$$

oder:

$$x_{il} = x_{il}' + v_{0l} t$$

es gilt

$$L'(\vec r_1', \dots, \vec r_N', \dot{\vec r}_1', \dots, \dot{\vec r}_N', t, \vec v_0)$$

$$= \sum_i \frac{m_i}{2} (\dot{\vec r}_i' + \vec v_0)^2 - \frac{1}{2} \sum_{i,j}{}' V(|\vec r_i' - \vec r_j'|)$$

$$= L(\vec r_1', \dots, \vec r_N', \dot{\vec r}_1', \dots, \dot{\vec r}_N') + \underbrace{\sum_i \left( m_i \dot{\vec r}_i' \vec v_0 + \frac{m_i}{2} \vec v_0^2 \right)}_{\frac{d}{dt} \Lambda(\vec r_1', \dots, \vec r_N', \vec v_0)}$$

mit $\Lambda = \sum_i \left( m_i \vec r_i' \cdot \vec v_0 + \frac{1}{2} m_i \vec v_0^2 \cdot t \right)$

Symmetrietransformation!

Noether:

$$\text{const} = \sum_{il} \frac{\partial L}{\partial \dot x_{il}} \cdot \frac{\partial x_{il}}{v_{0l'}} - \frac{\partial \Lambda}{\partial v_{0l'}} \Big|_{\vec v_0 = 0}$$

$$= \sum_{il} m_i \dot x_{il} \cdot \delta_{ll'} t - \sum_i (m_i x_{il'} + 0)$$

$$= \sum_i (m_i \dot x_{il'} t - m_i x_{il'}) \qquad \forall l'$$

$$\Rightarrow \quad \text{const} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i t - \sum_i m_i \vec{r}_i$$

$$= \vec{P} \cdot t - \vec{R} \cdot M \qquad \left(\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i\right)$$

$$\boxed{\text{geradlinig gleichförmige Bewegung des Schwerpunkts: } \vec{R} = (\vec{P}/M)\, t + \text{const}}$$

## 4) Homogenität der Zeit

Zeittranslation

$$t = t' + t_0$$

$L$ offensichtlich invariant

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_n p_n \dot{q}_n - L = \text{const}$$

(direkt, ohne Noether)

System ohne ZB, konservativ; also gilt weiter

$$\boxed{\text{Gesamtenergie} \quad E = T + U = \text{const}}$$