4 Anwendungen des Lagrange-Formalismus

4.1 Krummlinige Koordinaten

LII gelten auch für $K=0$ (keine ZB)

$x_1, \dots, x_{3N}$ als generalisierte Koordinaten

Bsp: $N=1$, konservatives System

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = T - V = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r})$$

LII $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}(m\dot{\vec{r}}) + \frac{\partial V}{\partial \vec{r}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

Krummlinige Koordinaten $q_1, \dots, q_{3N}$

$$L(q, \dot{q}, t) = L(x(q,t), \dot{x}(q,\dot{q},t), t)$$

LII-Gleichungen in $q, \dot{q}, t$

Bsp: $N=1$

$$x_j = x_j(q_1, q_2, q_3) \qquad j = 1, 2, 3$$

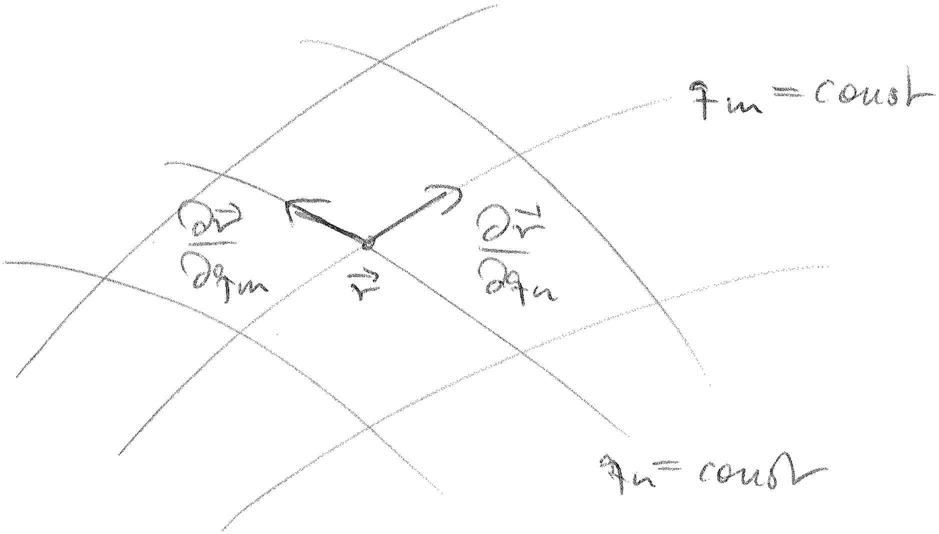
$$dx_j = \sum_n \frac{\partial x_j}{\partial q_n} dq_n$$

$$\Rightarrow \sum_j (dx_j)^2 = \sum_j \left(\sum_m \frac{\partial x_j}{\partial q_m} dq_m \right) \left(\sum_n \frac{\partial x_j}{\partial q_n} dq_n \right)$$

$$= \sum_{m,n} g_{mn}(q)\, dq_m\, dq_n$$

mit $g_{mn}(q) = \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial q_m} \frac{\partial x_j}{\partial q_n}$ "metrischer Tensor"

$$= \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_m} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_n}$$



krummlinig orthogonale Koordinaten $g_{mn}(q) \propto \delta_{mn}$

es gilt:

$$\dot{\vec{r}}^2 = \sum_j \left(\frac{dx_j}{dt} \right)^2 = \sum_{mn} g_{mn}(q)\, \dot{q}_m \dot{q}_n$$

$$T = T(q, \dot{q}) = \frac{m}{2} \sum_{mn} g_{mn}(q)\, \dot{q}_m \dot{q}_n$$

Bsp: ebene Polarkoordinaten r, φ

$$x = r\cos\varphi \qquad dx = \cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi$$
$$y = r\sin\varphi \qquad dy = \sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = r\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \quad \text{orthogonal}$$

$$T = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\right)^2 \dot{r}^2 + \left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\right)^2 \dot{\varphi}^2\right]$$

$$= \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right)$$

Bsp: Kugelkoordinaten r, ϑ, φ

$$\vec{r} = \vec{r}(r, \vartheta, \varphi) \Rightarrow \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}(r, \vartheta, \varphi, \dot{r}, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi})$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}}^2 \Rightarrow$$

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2\right)$$

4.2 Zwei-Körper-Problem

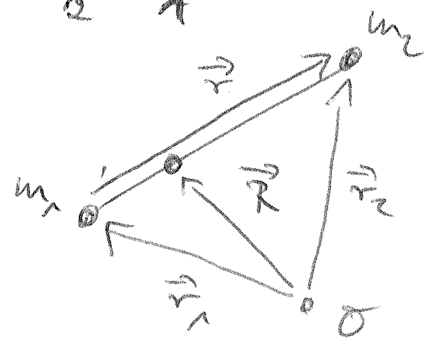
2 Massenpunkte, isoliertes System, konservativ:

$$L(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2) = \frac{m_1}{2}\dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{m_2}{2}\dot{\vec{r}}_2^{\,2} - U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$$

L II 6 gekoppelte DGL 2. Ordnung

Transformation auf Schwerpunkt- und Relativkoordinaten:

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \qquad \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$



Umkehrung:

$$\vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}$$

damit

$$L = \frac{m_1}{2}\left(\dot{\vec{R}} - \frac{m_2}{m_1+m_2}\dot{\vec{r}}\right)^2 + \frac{m_2}{2}\left(\dot{\vec{R}} + \frac{m_1}{m_1+m_2}\dot{\vec{r}}\right)^2 - U(r)$$

$$= \frac{m_1}{2}\dot{\vec{R}}^2 + \frac{m_2}{2}\dot{\vec{R}}^2 + \frac{m_1}{2}\frac{m_2^2}{(m_1+m_2)^2}\dot{\vec{r}}^2 + \frac{m_2}{2}\frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2}\dot{\vec{r}}^2 - U(r)$$

$$L = \frac{m_1+m_2}{2}\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2(m_1+m_2)}{(m_1+m_2)^2}\dot{\vec{r}}^2 - U(r)$$

$$\boxed{L(\vec{R},\dot{\vec{R}},\vec{r},\dot{\vec{r}}) = \frac{M}{2}\dot{\vec{R}}^2 + \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - U(r)}$$

mit $M = m_1+m_2$ Gesamtmasse

$m = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ reduzierte Masse

$$L = L_1(\vec{R},\dot{\vec{R}}) + L_2(\vec{r},\dot{\vec{r}})$$

„Freiheitsgrade entkoppelt"

Bewegungsgleichungen für $\vec{R}$, $\vec{r}$ unabhängig voneinander

---

$$L_1(\vec{R},\dot{\vec{R}}) = \frac{M}{2}\dot{\vec{R}}^2$$

$\vec{R}$ zyklisch $\Rightarrow$ $\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{R}}} = M\dot{\vec{R}} = \text{const}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \frac{\vec{P}}{M}t}$$

geradlinig, gleichförmige Schwerpunktsbewegung verbleibendes Ein-Körper-Problem

$$L_2(\vec{r},\dot{\vec{r}}) = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - U(r)$$

sphärisch symmetrisch

Kugelkoordinaten r, ϑ, φ (s.o.)

$$L_2(r,\vartheta,\varphi,\dot r,\dot\vartheta,\dot\varphi) = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta\,\dot\varphi^2) - U(r)$$

L II - Gleichungen

(φ) φ zyklisch $\Rightarrow$ $\frac{\partial L_2}{\partial\dot\varphi} = mr^2\sin^2\vartheta\,\dot\varphi = \text{const}$

es ist $l_z = m(x\dot y - y\dot x) = m(r\cos\varphi\sin\vartheta)(r\sin\dot\varphi\sin\vartheta) - m(r\sin\varphi\sin\vartheta)(r\cos\dot\varphi\sin\vartheta)$

$$= m\,r\cos\varphi\sin\vartheta\; r\cos\varphi\,\dot\varphi\sin\vartheta + m\,r\sin\varphi\sin\vartheta\; r\sin\varphi\,\dot\varphi\sin\vartheta$$

$$= mr^2\sin^2\vartheta\,\dot\varphi$$

$l_z = \text{const}$

Wahl der z-Achse war frei, also $\vec{l} = \vec{r}\times\vec{p} = \text{const}$

$\Rightarrow$ Bewegung verläuft o.B.d.A. in x-y-Ebene

also $\vartheta = \pi/2 = \text{const}$

$$l_z = mr^2\dot\varphi$$

(ϑ) $$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} - \frac{\partial L}{\partial \vartheta}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\vartheta}\right) - mr^2 \sin\vartheta \cos\vartheta\, \dot{\varphi}^2$$

$$= 2mr\dot{r}\dot{\vartheta} + mr^2\ddot{\vartheta} - mr^2 \sin\vartheta\cos\vartheta\,\dot{\varphi}^2$$

$\vartheta = \pi/2 = \text{const}$ ist Lösung

(r) $$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r}$$

$$= \frac{d}{dt}(m\dot{r}) - mr\dot{\vartheta}^2 - mr\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2 + \frac{dU(r)}{dr}$$

$\vartheta = \pi/2$ einsetzen liefert

$$m\ddot{r} = mr\dot{\varphi}^2 - \frac{dU}{dr}(r)$$

$$\boxed{m\ddot{r} = \frac{l_z^2}{mr^3} - \frac{dU}{dr}(r)}$$ Radialgleichung

einmal trivial integrierbar:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot{r}^2\right) = \frac{d}{dt}\left(-\frac{l_z^2}{2mr^2} - U(r)\right)$$

$$\boxed{E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{l_z^2}{2mr^2} + U(r) = \text{const}}$$

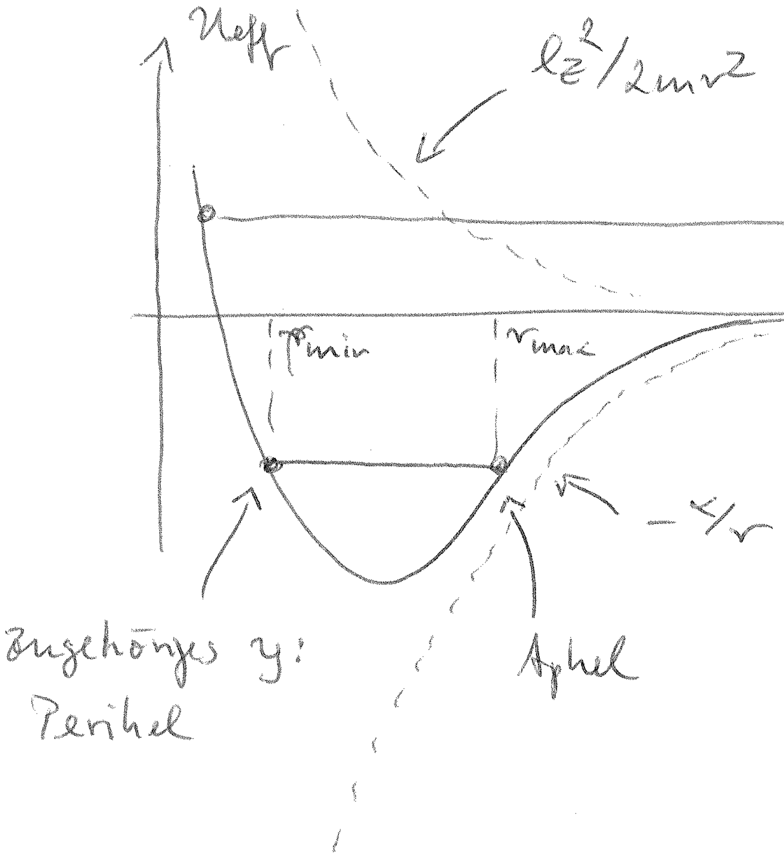
(Konsequenz von $\partial L/\partial t = 0$)

Diskussion:

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + U_{eff}(r) \quad \text{mit} \quad U_{eff}(r) = U(r) + \frac{l_z^2}{2mr^2}$$

effektives Potential

Bsp: $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$

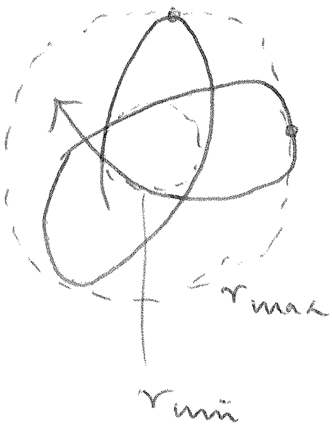


E>0: Streuung

E<0: gebundene Bewegung

Betrands Theorem: geschlossene Bahnen nur für

$$U(r) = -\alpha/r \quad \text{oder} \quad U(r) = \alpha r^2$$



sonst: Periheldrehung

Bestimmung der Bahn:

- Trennung der Variablen

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(r) - l_z^2/2mr^2\right)}}$$

- Integration $\rightarrow$ $t = t(r)$
- Auflösen $\rightarrow$ $\boxed{r = r(t)}$
- Einsetzen in $m r^2 \dot{\varphi} = l_z = \text{const}$

$$d\varphi = \frac{l_z}{m r(t)^2}\, dt$$

- Integration $\rightarrow$ $\boxed{\varphi = \varphi(t)}$

Bahnkurve (ohne zeitlichen Ablauf)

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{d\varphi}{dt}\frac{dt}{dr} = \frac{l_z}{mr^2}\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(r) - l_z^2/2mr^2\right)}}$$

Integration $\rightarrow$ $\boxed{\varphi = \varphi(r)}$

4.3 Kepler-Problem

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} \qquad \alpha = \gamma m_1 m_2 \text{: Gravitation (Planeten)}$$
$$\alpha = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Z_1 Z_2 \text{: Coulomb-WW (H-Atom)}$$

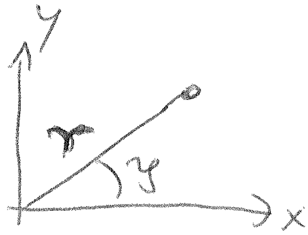
$\alpha > 0$ anziehend
$\alpha < 0$ abstoßend

Bahnkurve:

$$\varphi(r) = \int dr \, \frac{l_z/r^2}{\sqrt{2mE + 2m\alpha/r - l_z^2/r^2}}$$

$$= \arccos \frac{l_z/r - m\alpha/l_z}{\sqrt{2mE + m^2\alpha^2/l_z^2}} + \underbrace{\text{const}}_{=0}$$

möglich durch Wahl der x-Achse



es gilt:

$$\cos \arccos x = x$$

$$\Rightarrow -\sin \arccos x \cdot \arccos' x = 1$$

$$\Rightarrow \arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

also:
$$\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{l_z^2/r^2 + m^2\alpha^2/l_z^2 - 2m\alpha/r}{\sqrt{\dots}^2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\dots}} \cdot (-1) \frac{l_z}{r^2}$$

$$= \frac{l_z}{r^2} \cdot 1 \Big/ \sqrt{2mE + \cancel{m^2\alpha^2/l_z^2} - l_z^2/r^2 - \cancel{m^2\alpha^2/l_z^2} + 2m\alpha/r}$$

✓

es folgt

$$\cos\vartheta = \frac{l_z/r - m\alpha/l_z}{\sqrt{2mE + m^2\alpha^2/l_z^2}} \quad \Big| \; l_z/m\alpha$$

$$= \Big(\underbrace{\frac{l_z^2}{m\alpha}}_{p}\frac{1}{r} - 1\Big) \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+2E\frac{l_z^2}{m\alpha^2}}}}_{\varepsilon}$$

<u>Parameter</u> $p = \dfrac{l_z^2}{m\alpha}$

<u>Exzentrizität</u> $\varepsilon = \sqrt{1+2E\dfrac{l_z^2}{m\alpha^2}}$

$\Leftrightarrow$ Konstanten der Bewegung E, l_z

Bahnkurve:

$$\boxed{\frac{p}{r} = 1 + \varepsilon\cos\vartheta}$$

Kegelschnitte

$\varepsilon > 1 \Leftrightarrow E > 0$ Hyperbel

$\varepsilon = 1 \Leftrightarrow E = 0$ Parabel

$\varepsilon < 1 \Leftrightarrow E < 0$ Ellipse

$\varepsilon = 0 \Leftrightarrow \cancel{E = -\frac{\alpha}{r} + \frac{l_z^2}{}}$

$E = -\dfrac{m\alpha^2}{2l_z^2}$ Kreis

Kreis

$$\varepsilon = 0 \Rightarrow \frac{p}{r} = 1 \Rightarrow r = p = \frac{l_z^2}{m\alpha}$$

beachte:

$$\vec{F} = -\frac{\alpha}{r^2}\vec{e}_r = m\ddot{\vec{r}} = -mr\dot{\varphi}^2\vec{e}_r$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{r^2} = mr\dot{\varphi}^2 \qquad l_z = mr^2\dot{\varphi}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{r^2} = mr\frac{l_z^2}{m^2r^4} = \frac{l_z^2}{mr^3}$$

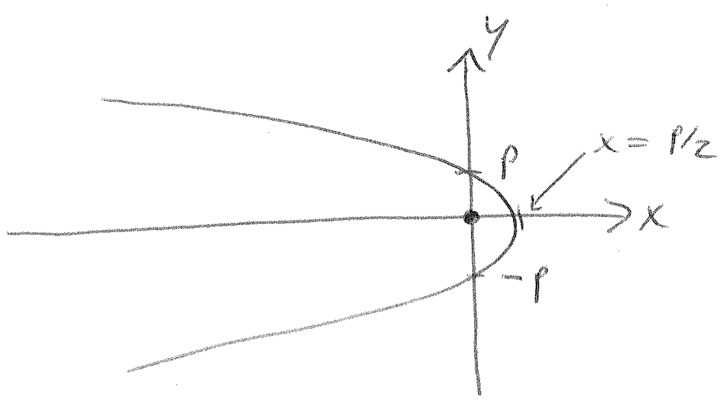
$$\Rightarrow r = \frac{l_z^2}{m\alpha} = p$$

Parabel

$$\varepsilon = 1 \Rightarrow \frac{p}{r} = 1 + \cos\varphi \Rightarrow \frac{p}{\sqrt{x^2+y^2}} = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\Rightarrow p = \sqrt{\dots} + x \Rightarrow (p-x)^2 = x^2 + y^2$$

$$\Rightarrow p^2 - 2px = y^2 \Rightarrow x = \frac{p}{2} - \frac{1}{2p}y^2$$



beachte:

$r = \min,\ \dot r = 0$ für $r = p/2$

$$\Rightarrow \quad 0 = E = \frac{m}{2}\dot r^2 - \frac{\alpha}{r} + \frac{l_z^2}{2mr^2} = -\frac{2\alpha}{p} + \frac{2l_z^2}{mp^2}$$

$$\Rightarrow \quad p = \frac{l_z^2}{m\alpha}$$

allgemein gilt (ε beliebig)

$$E = \frac{m}{2}\dot r^2 - \frac{\alpha}{r} + p\,\frac{\alpha}{2r^2}$$

für $r = \min = r_0$, $\dot r = 0$ ist

$$E = -\frac{\alpha}{r_0} + p\,\frac{\alpha}{2r_0^2}$$

l_z, p fest $\Rightarrow$ $E = \min$ falls

$$0 = \frac{dE}{dr_0} = \frac{\alpha}{r_0^2} - p\,\frac{\alpha}{r_0^3} \quad \Leftrightarrow \quad r_0 = p \quad \text{(Kreis)}$$

also $E_{min} = -\frac{\alpha}{2p}$

und $E > -\frac{\alpha}{2p}$ $\quad 1 + 2E\frac{p}{\alpha} > 0$

<u>Ellipse</u> ($\varepsilon < 0$, $E < 0$)

$$\frac{p}{\sqrt{x^2+y^2}} = 1 + \varepsilon\,\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\Rightarrow \quad p = \sqrt{\cdots} + \varepsilon x$$

$$\Rightarrow \quad (p - \varepsilon x)^2 = x^2 + y^2$$

$$\Rightarrow \quad p^2 + \varepsilon^2 x^2 - 2\varepsilon p x = x^2 + y^2$$

$$\Rightarrow \quad (1-\varepsilon^2) x^2 + y^2 + 2\varepsilon p x - p^2 = 0$$

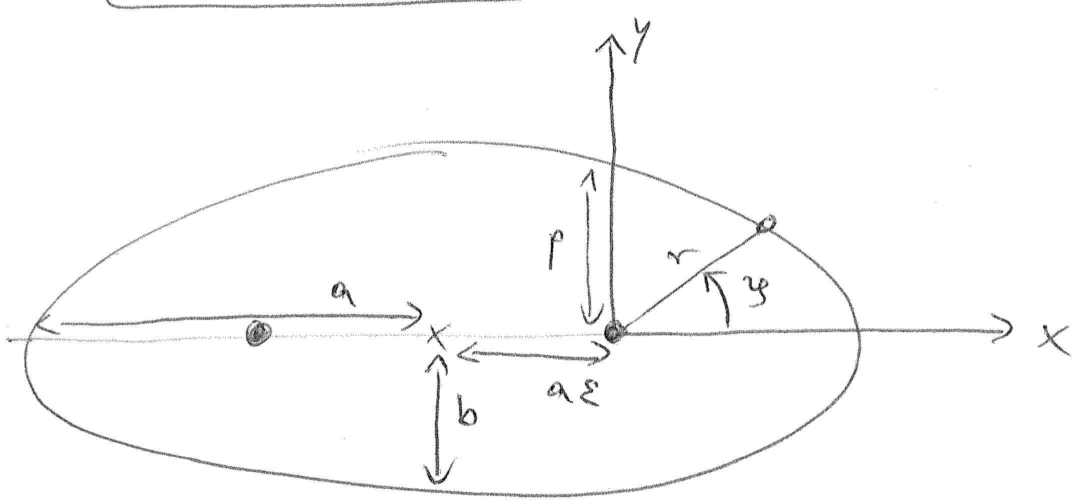
$$\Rightarrow \quad x^2 + \frac{y^2}{1-\varepsilon^2} + 2\varepsilon \frac{p}{1-\varepsilon^2} x - \frac{p^2}{1-\varepsilon^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(x + \varepsilon \frac{p}{1-\varepsilon^2}\right)^2 \underbrace{- \varepsilon^2 \frac{p^2}{(1-\varepsilon^2)^2} - \frac{p^2}{1-\varepsilon^2}}_{-\frac{\varepsilon^2 p^2 + (1-\varepsilon^2) p^2}{(1-\varepsilon^2)^2} = -\frac{p^2}{(1-\varepsilon^2)^2}} + \frac{y^2}{1-\varepsilon^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\left(x + \varepsilon \frac{p}{1-\varepsilon^2}\right)^2}{\left(\frac{p}{1-\varepsilon^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)^2} = 1$$

mit $a = \frac{p}{1-\varepsilon^2}$ und $b = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$ ist

$$\boxed{\frac{(x+\varepsilon a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$



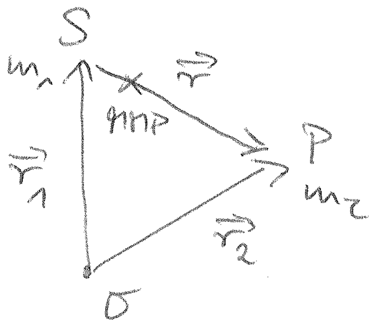
$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad y^2 = b^2(1-\varepsilon^2) = p^2$$

1. Keplersches Gesetz

Planetenbahnen: Ellipsen mit Sonne in einem Brennpunkt

$\vec{r}(t)$ bzw $r(\varphi)$ Ellipse

$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}_P - \vec{r}_S$



Rücktransformation

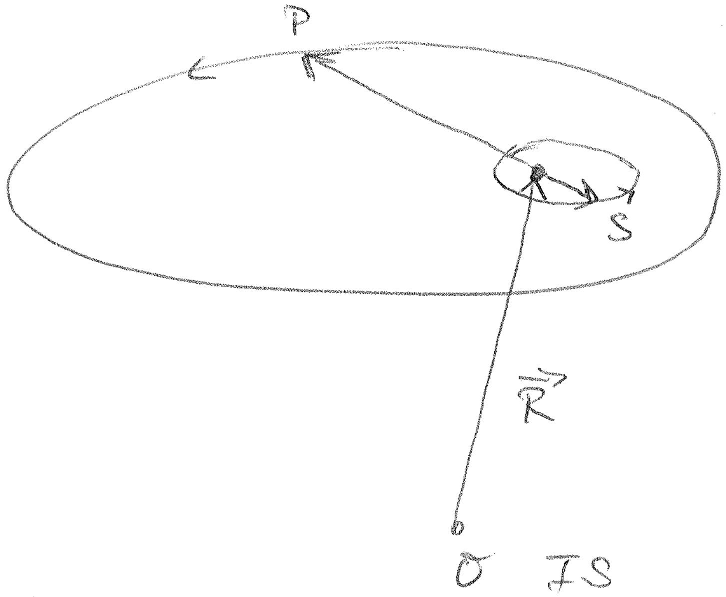
$$\vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r} \quad \left(\approx \vec{R}\right)$$

$m_1 \gg m_2$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r} \quad \left(\approx \vec{R} + \vec{r}\right)$$

$\vec{R} = R_0 + \frac{1}{M}\vec{P}_0 \cdot t$ in einem IS

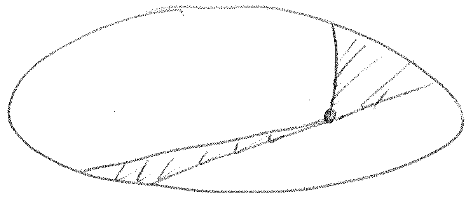
$\vec{r}_1 = \vec{R} + \text{const} \cdot \vec{r}$: beschleunigte Bewegung



P und S laufen auf Ellipsenbahnen um gemeinsamen MP (= Brennpunkt)

2. Keplersches Gesetz

Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen



$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\varphi = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}\, dt \underset{\uparrow}{=} \frac{l_z}{2m} dt \qquad \frac{l_z}{2m} = \text{const}$$

$$l_z = m r^2 \dot{\varphi}$$

3. Keplersches Gesetz

$T^2 \sim a^3$ $\qquad$ T: Umlaufzeit

$$T = \int dt = \int \frac{2m}{l_z} dA = \frac{2m}{l_z} \cdot \pi \cdot ab \qquad b^2 = p \cdot a$$

$$p = \frac{l_z^2}{m\alpha}$$

$$T^2 = \frac{4m^2}{l_z^2} \pi^2 a^2 \frac{l_z^2}{m\alpha} \cdot a$$

$$T^2 = \underbrace{\frac{4\pi^2 m}{\alpha}}_{} \cdot a^3$$

$$4\pi^2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{1}{\gamma m_1 m_2} = \frac{4\pi^2}{\gamma} \frac{1}{m_1 + m_2} \approx \frac{4\pi^2}{\gamma} \frac{1}{m_1}$$

nahezu unabhängig von m_2, nahezu gleich für alle Planeten

4.4 Beschleunigte Bezugssysteme

N II : nur gültig für Inertialsysteme, kartes. Koor.

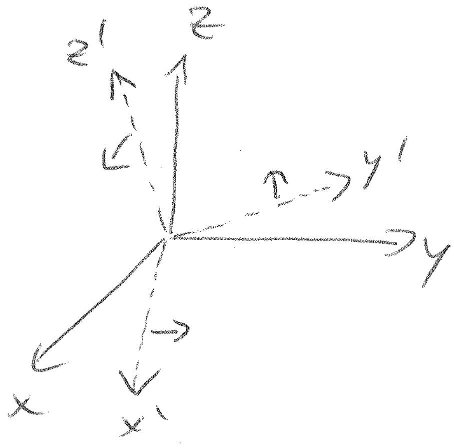
L II $\Leftrightarrow$ N II für Systeme ohne ZB, aber

L II forminvariant unter beliebigen Punkttransform.

z.B. $(N=1)$ $\quad \vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{d}(t) \quad$ mit $\ddot{\vec{d}}(t) \neq 0$

$\rightarrow$ einfache Möglichkeit zur Ableitung der Bewegungsgleichungen in Nicht-IS !

Bsp: rotierendes Bezugssystem



IS $\quad x, y, z, t$

BS $\quad x', y', z', t'$

$t' = t$

$$\vec{r}\,' = \underline{D}(t) \cdot \vec{r}$$

mit Drehmatrix $\underline{D}(t)$, d.h.

$$\underline{D}(t) \cdot \underline{D}(t)^T = \mathbb{1} \qquad \forall t$$

es gilt $\quad L(\vec{r},\dot{\vec{r}},t) = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r})$

und $\quad \vec{r} = \underline{D}^T \vec{r}\,' \qquad (\underline{D}^T = \underline{D}^{-1})$

also $\quad \dot{\vec{r}} = \underline{D}^T \dot{\vec{r}}\,' + \dot{\underline{D}}^T \vec{r}\,'$

$$\Rightarrow \boxed{L(\vec{r}\,',\dot{\vec{r}}\,',t) = \frac{m}{2}\left(\underline{D}^T\dot{\vec{r}}\,' + \dot{\underline{D}}^T\vec{r}\,'\right)^2 - V(\underline{D}^T\vec{r}\,')}$$

explizite t-Abhängigkeit
wegen $\underline{D}(t)$

$\Rightarrow$ Bewegungsgleichung enthält t explizit

betrachte Situation mit

$$\underline{D}(t=0) = \mathbb{1} \qquad BS = IS \text{ z.Zt. } t=0$$

für kleine t

$$\underline{D}(t) = \underline{D}(0) + \dot{\underline{D}}(0)\cdot t + \cancel{O(t^2)}$$

$$\underline{D}(t) = \mathbb{1} + \underline{\Omega}\cdot t$$

$\underline{D}(t)$ Drehmatrix

$$\mathbb{1} = \underline{D}(t)\,\underline{D}(t)^T = (\mathbb{1} + \underline{\Omega}t)(\mathbb{1} + \underline{\Omega}^T t)$$

$$= \mathbb{1} + (\underline{\Omega} + \underline{\Omega}^T)\,t + \cancel{O(t^2)}$$

also $\quad \underline{\Omega} = -\underline{\Omega}^T \quad$ antisymmetrisch es sei

$$\underline{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

dann gilt:

$$\underline{\Omega}\,\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_3 y - \omega_2 z \\ -\omega_3 x + \omega_1 z \\ \omega_2 x - \omega_1 y \end{pmatrix}$$

$$= - \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = - \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\boxed{\underline{\Omega}^T \vec{r}\,' = \vec{\omega} \times \vec{r}\,'}$$

also:

$$\underline{D}(t)\,\vec{r} = (\mathbb{1} + \underline{\Omega}\, t)\,\vec{r} = \vec{r} - \vec{\omega} \times \vec{r} \cdot t$$

bzw.

$$\boxed{\underline{D}(t)^T \vec{r}\,' = (\mathbb{1} + \underline{\Omega}^T t)\,\vec{r}\,' = \vec{r}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}\,' \cdot t}$$

Lagrange-Funktion

$$L(\vec{r}\,', \dot{\vec{r}}\,', t) = \frac{m}{2}\left(\underline{D}^T \dot{\vec{r}}\,'\right)^2 + m\, \underline{D}^T \dot{\vec{r}}\,' \cdot \dot{\underline{D}}^T \vec{r}\,'$$

$$+ \frac{m}{2}\left(\dot{\underline{D}}^T \vec{r}\,'\right)^2 - V\left(\underline{D}^T \vec{r}\,'\right)$$

für kleine t: approximative Lagrange-Funktion
(Vernachlässigung von Termen der $O(t)$)

$$\boxed{L(\vec r\,', \dot{\vec r}\,', t) = \frac{m}{2}\dot{\vec r}\,'^2 + m\dot{\vec r}\,' \cdot \underline{\Omega}^T \vec r\,' + \frac{m}{2}(\underline{\Omega}^T \vec r\,')^2 - V(\vec r\,')}$$

keine explizite Zeitabhängigkeit mehr

LII:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec r}\,'} = m\dot{\vec r}\,' + m\underline{\Omega}^T \vec r\,'$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec r}\,'} = m\ddot{\vec r}\,' + m\underline{\Omega}^T \dot{\vec r}\,'$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec r\,'} = m\underline{\Omega}\dot{\vec r}\,' + m\underline{\Omega}\cdot\underline{\Omega}^T \vec r\,' - \vec\nabla V(\vec r\,')$$

also

$$0 = m\ddot{\vec r}\,' + \underbrace{m(\underline{\Omega}^T - \underline{\Omega})\dot{\vec r}\,'}_{\substack{2m\underline{\Omega}^T\dot{\vec r}\,' \\ \shortparallel \\ 2m\vec\omega\times\dot{\vec r}\,'}} \underbrace{- m\underline{\Omega}\,\underline{\Omega}^T \vec r\,'}_{\substack{m\underline{\Omega}^T\underline{\Omega}^T\vec r\,' \\ \shortparallel \\ m\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r\,')}} + \vec\nabla V(\vec r\,')$$

$\Rightarrow$

$$m\ddot{\vec r}\,' = -\vec\nabla V(\vec r\,') \underbrace{- m\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r\,')}_{\text{Zentrifugal-}} \underbrace{- 2m\vec\omega\times\dot{\vec r}\,'}_{\text{Coriolis-Kraft}}$$

Scheinkräfte: Zentrifugal- Coriolis-Kraft

4.5 Teilchen im elektromagnetischen Feld

Lorentz-Kraft

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = q\,\vec{E}(\vec{r}, t) + q \cdot \dot{\vec{r}} \times \vec{B}(\vec{r}, t)$$

q: Ladung des Massenpunkts

$\vec{E}, \vec{B}$: elektrisches / magnetisches Feld

Potenzialdarstellung der Felder:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla}\,\Phi(\vec{r}, t) - \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t)$$

also:

$$\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = -q\,\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}, t) - q\,\frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t} + q\,\dot{\vec{r}} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t)\right)$$

es gilt

$$\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \frac{d}{dt}\frac{\partial U(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)}{\partial \dot{\vec{r}}} - \frac{\partial U(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)}{\partial \vec{r}}$$

mit

$$\boxed{U(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = q\,\Phi(\vec{r}, t) - q\,\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t)}$$

Beweis:

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{\vec{r}}} = -q \cdot \vec{A}$$

also

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}} = -q\frac{d}{dt}\vec{A} = -q\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{3} A_i(\vec{r},t)\,\vec{e}_i$$

$$= -q\sum_i \left(\vec{\nabla}A_i(\vec{r},t)\cdot\dot{\vec{r}} + \frac{\partial A_i(\vec{r},t)}{\partial t}\right)\vec{e}_i$$

$$= -q\sum_i (\dot{\vec{r}}\vec{\nabla})A_i(\vec{r},t)\,\vec{e}_i - q\frac{\partial}{\partial t}\sum_i A_i(\vec{r},t)\,\vec{e}_i$$

$$= \underline{-q(\dot{\vec{r}}\vec{\nabla})\vec{A}} - q\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

und mit

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}} = q\vec{\nabla}\Phi(\vec{r},t) - q\vec{\nabla}(\dot{\vec{r}}\vec{A}(\vec{r},t))$$

$$= q\vec{\nabla}\Phi - q\left[\vec{\nabla}(\dot{\vec{r}}\vec{A}) - (\dot{\vec{r}}\vec{\nabla})\vec{A}\right] - q(\dot{\vec{r}}\vec{\nabla})\vec{A}$$

$$= q\vec{\nabla}\Phi - q\,\dot{\vec{r}}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) \underline{- q(\dot{\vec{r}}\vec{\nabla})\vec{A}}$$

folgt

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}} = -q\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - q\vec{\nabla}\Phi + q\,\dot{\vec{r}}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})$$

$$= q\vec{E} + q\,\dot{\vec{r}}\times\vec{B} = \vec{F} \qquad \checkmark$$

also ist $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \iff \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0$ (LG)

mit

$$\boxed{L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - q\,\Phi(\vec{r}, t) + q\,\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}(\vec{r}, t)}$$

Lagrange-Funktion eines Teilchens (Masse m, Ladung q) im elektromagnetischen Feld

---

generalisierter Impuls:

$$\vec{p}_{gen} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}} + q\vec{A} = \vec{p}_{mech} + q\vec{A}$$

$$\boxed{\vec{p}_{gen} = \vec{p}_{mech} + q\vec{A}}$$

im statischen Fall, $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$, $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r})$ ist $\Phi = \Phi(\vec{r})$ und $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$ und somit $\partial L / \partial t = 0$

also:

$$\begin{aligned} \text{const} &= \vec{p}_{gen}\cdot\dot{\vec{r}} - L \\ &= (m\dot{\vec{r}} + q\vec{A})\,\dot{\vec{r}} - \left(\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - q\Phi + q\dot{\vec{r}}\vec{A}\right) \\ &= \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 + q\,\Phi \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \Rightarrow E = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 + \Phi = \text{const}}$$

<u>Def:</u> Sei $\chi = \chi(\vec{r}, t)$ beliebig.

Eine <u>Eichtransformation der Potenziale</u> ist gegeben durch

$$\boxed{\Phi \mapsto \Phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \qquad \vec{A} \mapsto \vec{A} + \vec{\nabla}\chi}$$

Ein Eichtransformation lässt die Observablen $\vec{E}$ und $\vec{B}$ invariant!

denn:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \mapsto -\vec{\nabla}\left(\Phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{A} + \vec{\nabla}\chi\right)$$

$$= -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} + \vec{\nabla}\frac{\partial}{\partial t}\chi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\chi = \vec{E}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \mapsto \vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla}\chi) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$$

aber: L ist nicht eichinvariant

$$L \mapsto L' = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - q\left(\Phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}\right) + q\dot{\vec{r}}\left(\vec{A} + \vec{\nabla}\chi\right)$$

$$= \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - q\Phi + q\dot{\vec{r}}\vec{A} + q\left(\frac{\partial \chi}{\partial t} + \vec{\nabla}\chi \cdot \dot{\vec{r}}\right)$$

$$\boxed{L \underset{\text{Eich-Trsf.}}{\mapsto} L' = L + q\frac{d}{dt}\chi}$$

L und L' liefern dieselben LII-Gleichungen, denn LII $\Leftrightarrow$ NII und $\vec{F} = q\vec{E} + q\dot{\vec{r}} \times \vec{B}$ ist (wie $\vec{E}$ und $\vec{B}$) invariant!

ganz allgemein gilt für jedes System
(auch $N>1$, $K>0$)

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Die Lagrange-Gleichungen sind invariant}\\ \text{unter einer }\underline{\text{mechanischen Eichtransformation}}\\ \qquad L \mapsto L' := L + \frac{d}{dt}\Lambda \\ \text{mit } \Lambda = \Lambda(q,t) \text{ beliebig}\end{array}}$$

Beweis:

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot q_n} = \frac{\partial L}{\partial \dot q_n} + \frac{\partial}{\partial \dot q_n}\frac{d}{dt}\Lambda$$

$$= \frac{\partial L}{\partial \dot q_n} + \frac{\partial}{\partial \dot q_n}\left(\sum_m \frac{\partial \Lambda}{\partial q_m}\dot q_m + \frac{\partial \Lambda}{\partial t}\right) = \frac{\partial L}{\partial \dot q_n} + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_n}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot q_n} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_n} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_n}$$

$$\frac{\partial L'}{\partial q_n} = \frac{\partial L}{\partial q_n} + \frac{\partial}{\partial q_n}\frac{d}{dt}\Lambda$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot q_n} - \frac{\partial L'}{\partial q_n} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_n} - \frac{\partial L}{\partial q_n} = 0 \quad \checkmark$$

---

denn: $$\frac{\partial}{\partial q_n}\frac{d}{dt}\Lambda = \frac{\partial}{\partial q_n}\left(\sum_m \frac{\partial \Lambda}{\partial q_m}\dot q_m + \frac{\partial \Lambda}{\partial t}\right)$$

$$= \sum_m \frac{\partial}{\partial q_m}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_n}\right)\dot q_m + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_n}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_n}\right)$$