3 Lagrange-Gleichungen zweiter Art

ZK oft nicht interessant

Eliminieren der ZB (nicht nur der ZK) möglich?

Krummlinige (angepasste) Koordinaten verwendbar?

Reduktion der Anzahl der Gleichungen

3.1 Generalisierte Koordinaten

Def: Anzahl der Freiheitsgrade eines holonomen Systems

$$\boxed{f = 3N - K}$$

Anzahl der notwendigen und hinreichenden Größen zur Festlegung der Positionen aller Teilchen

Bsp: A - Gleiten auf Ebene

$f = 2$ $\quad (x, y)$

C - ebenes Pendel

$f = 1$ $\quad (\vartheta)$

D - Perle auf Draht

$\cancel{f = 2}$ $\quad (\cancel{\varphi}, z)$

$f = 1$

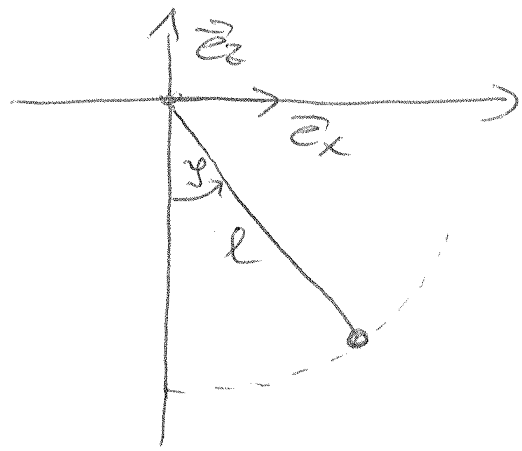
generalisierte Koordinaten

Def: (für holonomes System, $f = 3N - K$)

f Größen $q = (q_1, \dots, q_f)$ heißen <u>generalisierte Koordinaten</u>, falls q zusammen mit den K ZB alle kartesischen Koordinaten eindeutig festlegen:

$$\boxed{\begin{aligned} x_j &= x_j(q_1, \dots, q_f, t) \qquad j = 1, \dots, 3N \\ x_j &= x_j(q, t) \qquad f = 3N - K \end{aligned}}$$

Bsp: ebenes Pendel



$N = 1 \quad K = 2 \quad f = 1$

ZB $\quad x^2 + z^2 - \ell^2 = 0$

$\qquad y = 0$

<u>kart. Koord.:</u> x, y, z

<u>gen. Koord.:</u> φ

<u>Transformationsformeln</u>

$$x = \ell \sin\varphi$$

$$(y = 0)$$

$$z = -\ell \cos\varphi$$

<u>Parameter</u>

$$\ell = \text{const.}$$

- q_n $(n=1,\dots,f)$ haben nicht notwendig die Dimension einer Länge (Bsp.: φ)

- $q=(q_1,\dots,q_f)$ sind nicht eindeutig (Bsp.: andere Wahl $q=x$ z.B.; beachte: (x,z) sind wegen $f=1$ keine gen. Koord.!)

- generalisierte Koordinaten berücksichtigen automatisch alle ZB!

  es gilt <u>für beliebige Werte der q:</u>

$$f_s(x_1(q,t),\dots,x_{3N}(q,t),t)=0 \qquad s=1,\dots,K$$

  kurz:

$$\boxed{f_s(x(q,t),t)=0} \qquad \forall q,t$$

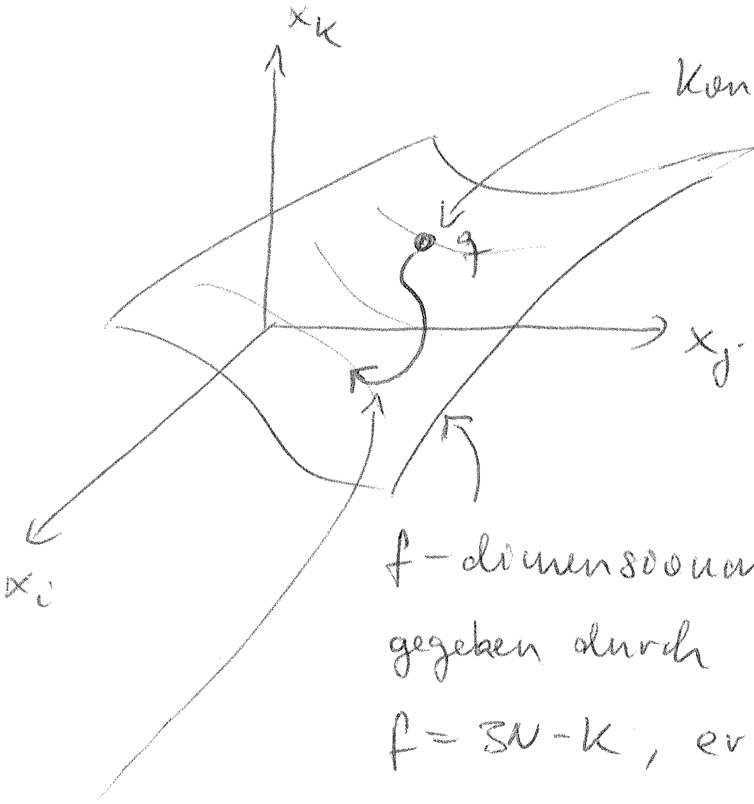
  dagegen ist $f_s(x,t)=0$ $(s=1,\dots,K)$ ein Satz von Bedingungen an die x (ZB)

<u>Bsp:</u> ebenes Pendel

$$x^2+z^2-\ell^2=\ell^2\sin^2\varphi+\ell^2\cos^2\varphi-\ell^2=0 \quad \forall\varphi$$

- $x_j=x_j(q,t)$ Parameterdarstellung des $f=3N-K$-dimensionalen <u>Konfigurationsraums</u>

– $q = (q_1, \dots, q_f)$: Punkt im Konfigurationsraum



Konfiguration des Systems, verträglich mit allen ZB

(kart. Koord.)
(3N-dim. Raum)

f-dimensionale Hyperfläche gegeben durch $f_s(x,t) = 0 \quad s = 1, \dots, K,$
$f = 3N - K$, evtl. zeitabhängig

Zeitentwicklung des Gesamtsystems:
Trajektorie $q(t)$ für alle t verträglich mit ZB

---

aus den Transformationsformeln folgt:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_j &= \frac{d}{dt} x_j(q_1, \dots, q_f, t) \\
&= \sum_{n=1}^{f} \frac{\partial x_j}{\partial q_n} \cdot \dot{q}_n + \frac{\partial x_j}{\partial t} \\
&= \sum_{n=1}^{f} \frac{\partial x_j}{\partial q_n}(q,t) \cdot \dot{q}_n + \frac{\partial x_j}{\partial t}(q,t) \\
&= \dot{x}_j(q, \dot{q}, t)
\end{aligned}
$$

- $\dot{q}_n$, $n=1,\dots,f$ heißen <u>generalisierte Geschwindigkeiten</u>

- beachte:

  in $\dot{x}_j = \dot{x}_j(q, \dot{q}, t)$ werden die $\dot{q}_n$ als unabhängige Variablen aufgefasst

- die $\dot{q}$ – Abhängigkeit ist linear!

  also:

$$\boxed{\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_n}(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial x_j}{\partial q_n}(q, t)}$$

Bsp: ebenes Pendel

$$x = l \sin\varphi \qquad z = -l\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \dot{x} = l\cos\varphi \cdot \dot{\varphi} \qquad \dot{z} = l \sin\varphi\, \dot{\varphi}$$

$$= \dot{x}(\varphi, \dot{\varphi}, \cancel{t}) \qquad = \dot{z}(\varphi, \dot{\varphi}, \cancel{t})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{\varphi}} = l\cos\varphi = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \qquad \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{\varphi}} = l\sin\varphi = \frac{\partial z}{\partial \varphi}$$

Ziel: Bewegungsgleichungen ohne ZK / ZB

LI: $m_j \ddot{x}_j = F_j(x, \dot{x}, t) + \sum_{s=1}^{K} \lambda_s(x, \dot{x}, t) \frac{\partial}{\partial x_j} f_s(x, t)$

$(j = 1, \dots, 3N)$

Eliminierung der ZK:

Multiplikation mit $\frac{\partial x_j}{\partial q_n}(q, t)$, $\sum_j$:

$$\sum_{j=1}^{3N} m_j \ddot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_n}(q, t) = \sum_{j=1}^{3N} F_j(x, \dot{x}, t) \frac{\partial x_j}{\partial q_n}(q, t) + R$$

es gilt: (für mit den ZB verträgliche x, also für $x = x(q, t)$)

$$R = \sum_{j=1}^{3N} \left(\sum_{s=1}^{K} \lambda_s(x, \dot{x}, t) \frac{\partial}{\partial x_j} f_s(x, t) \right) \frac{\partial x_j}{\partial q_n}(q, t)$$

$$= \sum_s \lambda_s(x, \dot{x}, t) \sum_j \frac{\partial f_s}{\partial x_j}(x(q, t), t) \frac{\partial x_j}{\partial q_n}(q, t)$$

$$= \sum_s \lambda_s(x, \dot{x}, t) \frac{\partial}{\partial q_n} \underbrace{f_s(x(q, t), t)}_{= 0 \ \forall q \ !} = 0$$

$$\boxed{\sum_j m_j \ddot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_n} = \sum_j F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_n}}$$

- f Gleichungen für f gen. Koordinaten
- $3N - K$ Gleichungen (LI: $3N + K$)
  $\uparrow$!
- keine ZK / ZB, nur $x_j = x_j(q, t)$ nötig

Alternative:

d'Alembertsches Prinzip

$$\sum_{j=1}^{3N} (F_j - m_j \ddot{x}_j)\, \delta x_j = 0$$

mit $x_j = x_j(q_1, \dots, q_f, t)$ ist

$$\delta x_j = \sum_{n=1}^{f} \frac{\partial x_j}{\partial q_n} \delta q_n \qquad (\delta t = 0\,!)$$

somit

$$\sum_j (F_j - m_j \ddot{x}_j) \sum_n \frac{\partial x_j}{\partial q_n} \delta q_n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_n \left[\sum_j (F_j - m \ddot{x}_j) \frac{\partial x_j}{\partial q_n} \right] \delta q_n = 0$$

Die $q_1, \dots, q_f$ können unabhängig variiert werden, denn ZB $f_s(x(q,t),t) = 0 \quad \forall q\,!$

$$\Rightarrow [\dots] = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_j m \ddot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_n} = \sum_j F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_n}}$$

beachte: im d'Alembert-Prinzip sind die x_j nicht unabhängig (wegen der ZB)
also $(F_j - m_j \ddot{x}_j) \neq 0$

Bsp: ebenes Pendel

$$x = l \sin \varphi \quad z = -l\cos\varphi \quad F_x = 0 \quad F_z = -mg$$

also:

$$m \frac{d^2(l\sin\varphi)}{dt^2}(l\cos\varphi) + m\frac{d^2(-l\cos\varphi)}{dt^2}(l\sin\varphi)$$

$$= 0\cdot(l\cos\varphi) + (-mg)(l\sin\varphi)$$

d.h.

$$\underbrace{\frac{d^2(\sin\varphi)}{dt^2}}_{\frac{d}{dt}(\cos\varphi\,\dot\varphi)} \cos\varphi - \underbrace{\frac{d^2(\cos\varphi)}{dt^2}}_{-\cos\varphi\,\dot\varphi^2 - \sin\varphi\,\ddot\varphi} \cdot \sin\varphi = -\frac{g}{l}\sin\varphi$$

$$\frac{d}{dt}(\cos\varphi\,\dot\varphi) = -\sin\varphi\,\dot\varphi^2 + \cos\varphi\,\ddot\varphi$$

$$\Leftrightarrow \quad \ddot\varphi + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0 \quad ✓$$

Nachteil der Bewegungsgleichung:

enthält kart. Kraftkomponenten und Koordinaten

3.2 Lagrange-Funktion und Lagrange-Gleichungen zweiter Art

$$\sum_j m_j \ddot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_n} = \sum_j F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_n} = Q_n$$

Def.:

$$\boxed{Q_n = \sum_j F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_n}}$$

generalisierte Kraft

betrachte konservatives System, d.h. $\exists$ Potenzial

$$U = U(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) = U(x_1, \ldots, x_{3N}) = U(x)$$

es ist $U(x) \neq U(x,t)$, aber u.U. $x = x(q,t)$, d.h.

$$U(q,t) = U(x(q,t))$$

und

$$-\frac{\partial U}{\partial q_n}(q,t) = -\frac{\partial}{\partial q_n} U(x(q,t))$$

$$= -\sum_j \frac{\partial U}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial q_n}$$

$$= \sum_j F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_n}$$

konservatives System:

$$\boxed{Q_n = -\frac{\partial U(q,t)}{\partial q_n}} \qquad \text{vergl.: } F_j = -\frac{\partial U(x)}{\partial x_j}$$

(U mit expliziter t-Abhängigkeit nur bei t-abhängigen Transformationsformeln $x = x(q,t)$!)

<u>Bsp:</u> ebenes Pendel

$$U = V = V(z) = mgz = -mgl\cos\varphi = U(\varphi)$$

denn: $F_z = -\frac{d}{dz}(mgz)$ $\quad z = -l\cos\varphi$

generalisierte Kraft

$$Q_\varphi = -\frac{\partial U}{\partial \varphi} = -mgl\sin\varphi$$

---

jetzt Diskussion der kinetischen Energie

(Bezug zur anderen Seite der Bewegungsgleichung

$\sum_j m_j \ddot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_n}$?)

$$T = \sum_j \frac{1}{2} m_j \dot{x}_j^2 = T(\dot{x}) \qquad \dot{x} = \dot{x}(q,\dot{q},t)$$

$$T(q,\dot{q},t) = T(\dot{x}(q,\dot{q},t))$$

es ist

$$\dot{x}_j = \sum_n \frac{\partial x_j}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial x_j}{\partial t} \qquad (\text{lineare } \dot{q}\text{-Abh.!})$$

also

$$T = \sum_j \frac{1}{2} m_j \left(\sum_m \frac{\partial x_j}{\partial q_m} \dot{q}_m + \frac{\partial x_j}{\partial t} \right) \left(\sum_n \frac{\partial x_j}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial x_j}{\partial t} \right)$$

$$\boxed{T = \sum_{m,n=1}^{f} a_{mn} \dot{q}_m \dot{q}_n + \sum_m b_m \dot{q}_m + c}$$

- $T = T(q, \dot{q}, t)$: maximal quadratische $\dot{q}$-Abh.
- T allg. auch von q abhängig
  (beachte $a_{mn} = a_{mn}(q,t)$, $b_m = b_m(q,t)$)

Bsp: ebenes Pendel

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2}\left[(l \cos\varphi\, \dot{\varphi})^2 + (l \sin\varphi\, \dot{\varphi})^2\right]$$

$$= \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 = T(\dot{\varphi}) = T(\cancel{\varphi}, \dot{\varphi}, \cancel{t})$$

nicht typisch!

---

falls $x(q,t) = x(q)$:

$$T = \sum_j \frac{1}{2} m_j \sum_m \frac{\partial x_j}{\partial q_m} \dot{q}_m \sum_n \frac{\partial x_j}{\partial q_n} \dot{q}_n = \sum_{mn} a_{mn} \dot{q}_m \dot{q}_n$$

mit $a_{mn} = a_{mn}(q)$

also $T = T(\dot{q})$

Ableitungen von $T(q,\dot q,t) = T(\dot x(q,\dot q,t))$:

$$\frac{\partial T}{\partial q_n} = \sum_j \frac{\partial T}{\partial \dot x_j}\frac{\partial \dot x_j}{\partial q_n} = \sum_j m_j \dot x_j \frac{\partial \dot x_j}{\partial q_n}$$

$$T = \sum_j \frac{m_j}{2}\dot x_j^2 \qquad \frac{\partial \dot x_j}{\partial \dot q_n} = \frac{\partial x_j}{\partial q_n}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot q_n} = \sum_j \frac{\partial T}{\partial \dot x_j}\frac{\partial \dot x_j}{\partial \dot q_n} = \sum_j m \dot x_j \frac{\partial x_j}{\partial q_n}$$

beachte:

$$\sum_j m_j \ddot x_j \frac{\partial x_j}{\partial q_n} \left(= \sum_j F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_n}\right) = Q_n$$

zweite Ableitung

(Bewegungsgleichung)

daher:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_n} = \frac{d}{dt}\sum_j m \dot x_j \frac{\partial x_j}{\partial q_n}$$

$$= \underbrace{\sum_j m_j \ddot x_j \frac{\partial x_j}{\partial q_n}}_{\checkmark} + \underbrace{\sum_j m_j \dot x_j \frac{d}{dt}\frac{\partial x_j}{\partial q_n}}_{?}$$

also:

$$Q_n = \sum_j m_j \ddot x_j \frac{\partial x_j}{\partial q_n} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_n} - \overbrace{\sum_j m_j \dot x_j \underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial x_j}{\partial t}}_{?}}^{?}$$

es gilt

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial x_j}{\partial q_n} = \frac{d}{dt}\frac{\partial x_j}{\partial q_n}(q,t)$$

$$= \sum_m \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_m \partial q_n} \cdot \dot{q}_m + \frac{\partial^2 x_j}{\partial t \partial q_n}$$

andererseits gilt

$$\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_n} = \frac{\partial}{\partial q_n}\left(\sum_m \frac{\partial x_j}{\partial q_m}\dot{q}_m + \frac{\partial x_j}{\partial t}\right)$$

$$= \sum_m \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_n \partial q_m}\dot{q}_m + \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_n \partial t}$$

also

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial x_j}{\partial q_n} = \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_n}$$

und somit

$$\sum_j m_j \dot{x}_j \frac{d}{dt}\frac{\partial x_j}{\partial q_n} = \sum_j m_j \dot{x}_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_n} = \frac{\partial T}{\partial q_n}$$

zusammen also:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial T}{\partial q_n} = Q_n \qquad n = 1,\dots,f}$$

keine ZK / ZB

keine kartesischen Koordinaten

f Gleichungen, f Unbekannte

für konservative Systeme ist

$$Q_n = -\frac{\partial U}{\partial q_n} = -\frac{\partial U}{\partial q_n} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_n}$$

trivial, denn $U = U(q,t)$, $\dot{q}$-unabhängig

und somit

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial (T-U)}{\partial q_n} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial T}{\partial q_n} - Q_n = 0$$

<u>Def</u>: <u>Lagrange-Funktion</u>

$$L(q,\dot{q},t) = T(q,\dot{q},t) - U(q,\dot{q},t)$$

(für konservative Systeme und Systeme mit $Q_n = -\frac{\partial U}{\partial q_n} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_n}$)

damit gilt

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial L}{\partial q_n} = 0}$$

$n = 1, \dots, f$

Lagrange-Gleichungen zweiter Art, L^{II}

- alle Ziele erreicht (keine ZK/ZB in Bew.glg.; keine kart. Koord.; nur $f = 3N-K$ Glgen.)
- $L = T - U$ Skalar, ohne direkte physikalische Bedeutung
- verschiedene Sätze generalisierter Koordinaten denkbar $L(q,\dot{q},t)$ davon abhängig, nicht eindeutig

Bsp: ebenes Pendel

1) generalisierte Koordinaten einführen (φ) und Transformationsformeln aufstellen:

$$\begin{aligned} x &= l \sin\varphi \\ z &= -l\cos\varphi \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{x} &= l\cos\varphi\,\dot{\varphi} \\ \dot{z} &= l\sin\varphi\,\dot{\varphi} \end{aligned}$$

2) $L(q,\ddot{q},t)$ bestimmen

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2$$

$$U = mgz = -mgl\cos\varphi$$

also:

$$L = L(\varphi,\dot{\varphi},t) = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 + mgl\cos\varphi$$

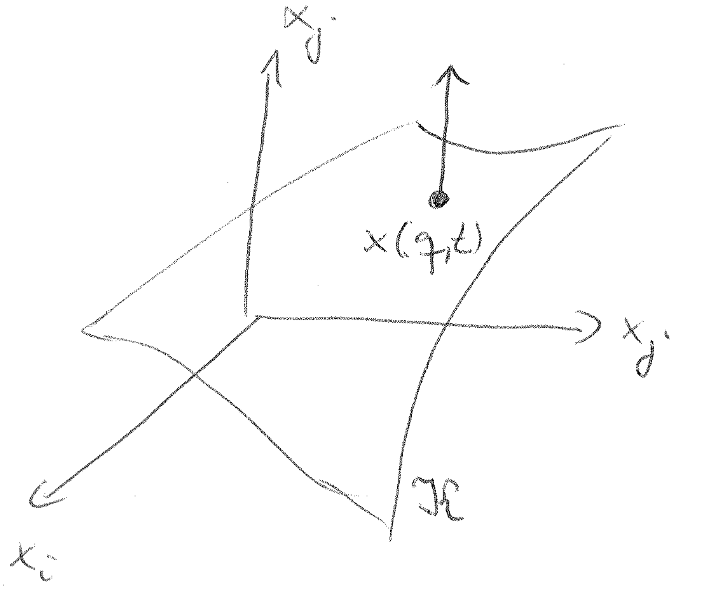
3) LG aufstellen

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = m l^2 \ddot{\varphi} + mgl\sin\varphi$$

$$\Leftrightarrow \quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$$

✓

geometrische Interpretationen



t fest

$f = 3N-k$-dimensionaler Konfigurationsraum $\mathcal{K}$:

$\{x \mid f_s(x,t) = 0\}$

oder

$\{x(q,t) \mid q = (q_1, \dots, q_f) \text{ beliebig}\}$

$z = (z_1, \dots, z_{3N}) \perp \mathcal{K}$ (Postulat an Form der ZK)

also

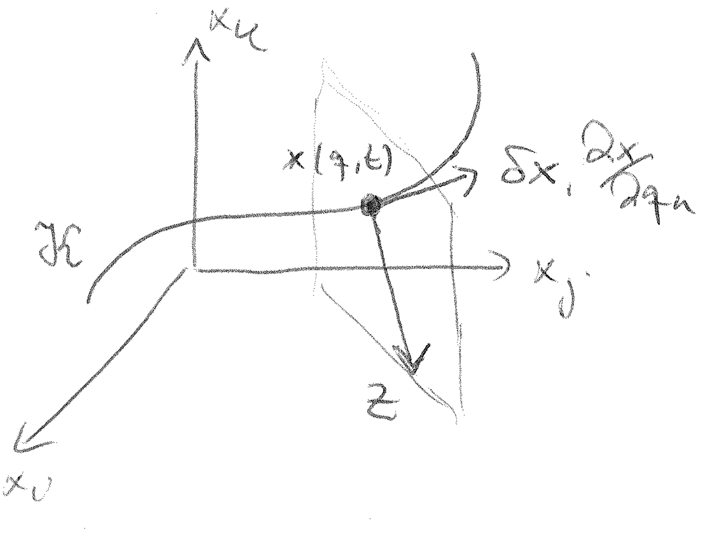
$$z = \sum_s \lambda_s \nabla_x f_s(x,t)$$ $\nabla_x f_s$: Normalenvektor

oder

$$z \cdot \frac{\partial x}{\partial q_n} = \sum_j z_j \frac{\partial x_j}{\partial q_n} = 0$$ $\frac{\partial x}{\partial q_n}$: Tangentenvektor

oder

$$z \cdot \delta x = \sum_j z_j \, \delta x_j = 0$$ δx: infinites. Tangentenvektor



LII gelten auch für nichtkonservative Kräfte, die durch ein <u>geschwindigkeitsabhängiges Potenzial</u> $U(x,\dot{x})$ über

$$F_j = \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_j} - \frac{\partial U}{\partial x_j}$$

bestimmt sind, denn es folgt

$$Q_n = \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial U}{\partial q_n}$$

<u>Beweis:</u>

$$Q_n \overset{\text{Def}}{=} \sum_j F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_n} = \sum_j \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_j}\right)\frac{\partial x_j}{\partial q_n} - \sum_j \frac{\partial U}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial q_n}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\sum_j \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_j}\underbrace{\frac{\partial x_j}{\partial q_n}}_{=\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_n}}\right) - \sum_j \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_j}\underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial x_j}{\partial q_n}}_{=\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_n}} - \sum_j \frac{\partial U}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial q_n}$$

$$= \frac{d}{dt}\sum_j \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_j}\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_n} - \sum_j \frac{\partial U}{\partial \dot{x}_j}\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_n} - \sum_j \frac{\partial U}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial q_n}$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_n}(q,\dot{q},t) - \frac{\partial U}{\partial q_n}(q,\dot{q},t)$$

mit $U(q,\dot{q},t) = U(x(q,t), \dot{x}(q,\dot{q},t))$

<u>Bsp:</u> Lorentz-Kraft, s.u.

3.3 Erhaltungsgrößen

i. allg. ist

$$L = L(q_1, \dots, q_f, \dot q_1, \dots, \dot q_f, t)$$

a) $\dot q$ - Abhängigkeit

betrachte generalisierte Koordinate q_n

$\exists\, j$ so dass x_j abhängig von q_n (sonst q_n überflüssig)

also $\frac{\partial x_j}{\partial q_n} \neq 0$

Kinetische Energie

$$T = \sum_j \frac{1}{2} m_j \Big(\sum_m \underbrace{\frac{\partial x_j}{\partial q_m}}_{\neq 0 \text{ für } m=n} \dot q_m + \frac{\partial x_j}{\partial t} \Big)^2$$

also T und damit L abhängig von $\dot q_n$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial L}{\partial \dot q_n} \neq 0 \quad \forall n = 1, \dots, f}$$

ansonsten: q_n überflüssig, keine generalisierte Koord.

b) q- Abhängigkeit

sei L unabhängig von q_n für ein n:

$$\boxed{q_n \text{ heißt } \underline{\text{zyklisch}}, \text{ falls } \frac{\partial L}{\partial q_n} = 0}$$

<u>Def:</u> $p_n = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}$ <u>generalisierter Impuls</u>

aus $L\,II$, $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} - \dfrac{\partial L}{\partial q_n} = 0$ folgt

$$\boxed{q_n \text{ zyklisch} \Rightarrow p_n = \text{const}}$$

c) t- Abhängigkeit

sei L unabhängig von t, $\dfrac{\partial L}{\partial t} = 0$, $L = L(q, \dot{q})$

dann gilt

$$\frac{d}{dt} L(q, \dot{q}) = \sum_n \frac{\partial L}{\partial q_n} \dot{q}_n + \sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \ddot{q}_n$$

$$\overset{L\,II}{=} \sum_n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \right) \dot{q}_n + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \left(\frac{d}{dt} \dot{q}_n \right)$$

$$= \sum_n \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \dot{q}_n \right) = \frac{d}{dt} \sum_n p_n \dot{q}_n$$

also ist $\frac{d}{dt}\left(\sum_n p_n \dot{q}_n - L\right) = 0$

somit:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow \sum_n p_n \dot{q}_n - L = \text{const}}$$

phys. Bedeutung der Erhaltungsgröße?

weitere Annahmen:

1) konservatives System, d.h. $U = U(q)$
(keine geschwindigkeitsabhängige Kraft, $U = U(q, \dot{q}, t)$)

2) skleronome ZB (zeitunabhängig)

3) zeitunabhängige Transformationsformeln $x = x(q)$

Bsp: skleronome ZB $x^2 + y^2 - R^2 = 0$
generalisierte Koordinate: α
Transformationsformeln $x = \sin \alpha t$
$y = \cos \alpha t$

(zeitabhängig trotz skleronomer ZB
durch ungeschickte Wahl der gen. Koord.)

damit folgt

$$T = \sum_j \frac{1}{2} m_j \left(\sum_n \frac{\partial x_j}{\partial q_n} \dot{q}_n + \cancel{\frac{\partial x_j}{\partial t}} \right)^2$$

$$= \sum_{mn} \underbrace{\left(\sum_j \frac{1}{2} m_j \frac{\partial x_j}{\partial q_m} \frac{\partial x_j}{\partial q_n} \right)}_{a_{mn}(q) = a_{nm}(q)} \dot{q}_m \dot{q}_n$$

also

$$\sum_n p_n \dot{q}_n = \sum_n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \dot{q}_n \overset{\mathcal{U} = \mathcal{U}(q)}{=} \sum_n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} \dot{q}_n$$

$$= \sum_n \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_n} \sum_{kl} a_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l \right) \dot{q}_n$$

$$= \sum_n \left(\sum_l a_{nl} \dot{q}_l + \sum_k a_{kn} \dot{q}_k \right) \dot{q}_n$$

$$= \sum_n \left(2 \sum_l a_{nl} \dot{q}_l \right) \dot{q}_n$$

$$= 2 \sum_{nl} a_{nl} \dot{q}_n \dot{q}_l = 2T$$

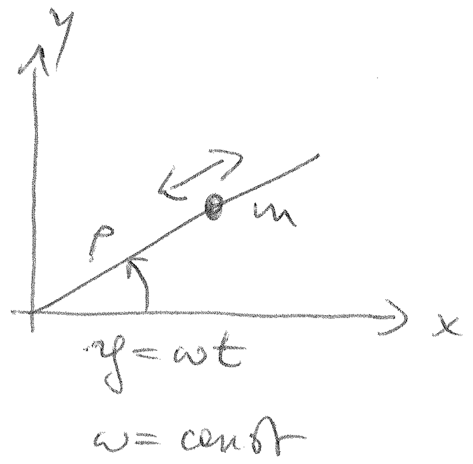
$$\sum_n p_n \dot{q}_n - L = 2T - (T - \mathcal{U}) = T + \mathcal{U} = E$$

<u>Energieerhaltungssatz:</u> (für Systeme mit ZB)

$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, konservatives System ($\mathcal{U} = \mathcal{U}(q)$), skleronome ZB und $x = x(q)$ zeitunabhängig

$$T + \mathcal{U} = E = \text{const}$$

Bsp: Massenpunkt auf rotierender Stange



$N = 1$

ZB $z = 0$ (trivial)

$y/x - \tan \omega t = 0$

$f = 1$

generalisierte Koordinate ρ

Transformationsformeln:

$$x = \rho \cdot \cos \omega t \qquad \dot{x} = \dot{\rho} \cos \omega t - \omega \rho \sin \omega t$$
$$y = \rho \cdot \sin \omega t \qquad \dot{y} = \dot{\rho} \sin \omega t + \omega \rho \cos \omega t$$

System holonom (keine Kraft!), ZB rheonom

→ keine Energieerhaltung

(anschaulich rheonome ZK verrichtet reale Arbeit)

Lagrange-Funktion

$$L = T - U = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \omega^2 \rho^2) = L(\rho, \dot{\rho})$$

also: $\partial L / \partial t = 0$

Erhaltungsgröße

$$\text{const} = p_\rho \cdot \dot{\rho} - L = \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} \dot{\rho} - L = m\dot{\rho}^2 - \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \omega^2 \rho^2)$$

$$= \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 - \omega^2 \rho^2)$$

beachte

$$T + U = T = \frac{m}{2}(\dot\rho^2 + \omega^2\rho^2) \neq \text{const}$$

LII:

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\rho} - \frac{\partial L}{\partial \rho} = \frac{d}{dt}(m\dot\rho) - m\omega^2\rho = m(\ddot\rho - \omega^2\rho)$$

$$\Rightarrow \quad \ddot\rho = \omega^2\rho$$

$$\Rightarrow \quad \rho(t) = c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t}$$

sei $\dot\rho(0) = 0 \Rightarrow c_1\omega - c_2\omega = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = c$

sei $\rho(0) = \rho_0 \Rightarrow 2c = \rho_0$

$$\rho(t) = \frac{1}{2}\rho_0(e^{\omega t} + e^{-\omega t}) = \rho_0 \cosh \omega t$$

es ist

$$T + U = \frac{m}{2}(\rho_0^2\omega^2 \sinh^2\omega t + \omega^2\rho_0^2 \cosh \omega t)$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2\rho_0^2(\sinh^2\omega t + \cosh^2\omega t) \neq \text{const}$$

$$p \cdot \dot q - L = \frac{m}{2}\omega^2\rho_0^2(\sinh^2\omega t - \cosh^2\omega t) = -\frac{m}{2}\omega^2\rho_0^2$$

$$= \text{const}$$

3.4 Punkttransformationen

Bsp: Massenpunkt auf rotierender Stange
jetzt: generalisierte Koordinate x

Transformationsformeln

$$x = x$$
$$y = x \tan \omega t$$

es folgt

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{m}{2}\left(1 + \tan^2 \omega t\right) \times$$
$$\times \left[\dot{x}^2 + 2\omega \tan \omega t \cdot x\dot{x} + \omega^2 (1 + \tan^2 \omega t)\, x^2\right]$$

LII:

$$\ddot{x} + 2\omega \tan \omega t \cdot \dot{x} + 2\omega^2 \tan^2 \omega t \cdot x = 0$$

Ansatz:

$$x = \rho \cos \omega t$$

liefert

$$\ddot{\rho} - \omega^2 \rho = 0 \quad \checkmark$$

Fazit:
- L nicht eindeutig
- L, LII einfach in angepassten Koordinaten
- LII für $L(x, \dot{x}, t)$ $\Leftrightarrow$ LII für $L(\rho, \dot{\rho}, t)$

"Forminvarianz"

allgemein: ein Übergang von gen. Koord. $q_1, \dots, q_f$ zu $q_1', \dots, q_f'$ heißt

<u>Punkttransformation</u>

$$q_1 = q_1(q_1', \dots, q_f', t)$$
$$\vdots$$
$$q_f = q_f(q_1', \dots, q_f', t)$$

kurz:

$$q = q(q', t)$$

damit ist auch

$$\dot{q} = \frac{d}{dt} q(q', t) = \dot{q}(q', \dot{q}', t)$$

neue Transformationsformeln

$$x = x(q,t) = x(q(q',t), t) \left(= x'(q',t) \right) = x(q',t)$$

$\uparrow$ korrekte $\quad$ $\uparrow$ suggestive

Schreibweise

und

$$\dot{x} = \dot{x}(q, \dot{q}, t) = \dot{x}(q(q',t), \dot{q}(q', \dot{q}', t), t)$$
$$= \dot{x}(q', \dot{q}', t)$$

alternativ kann $\dot{x}(q', \dot{q}', t)$ auch aus $x(q', t)$ bestimmt werden

$$\dot{x}(q', \dot{q}', t) = \frac{d}{dt} x(q', t)$$

(Beweis: s.u.)

neue Lagrange - Funktion

$$L = L(q, \dot q, t) = L(x(q,t), \dot x(q, \dot q, t), t)$$

$$= L(x(q',t), \dot x(q', \dot q', t), t) = L(q', \dot q', t)$$

unterschiedliche funktionale Abhängigkeiten!
(trotzdem gleiches Symbol L)

die Lagrange-Funktion kann direkt (durch Einsetzen) von alten auf neue Koordinaten umgerechnet werden

$$\boxed{L(q', \dot q', t) = L(q(q',t), \dot q(q', \dot q', t), t)}$$

<u>LII - Gleichungen sind forminvariant unter Punkttrf.</u>

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_n} - \frac{\partial L}{\partial q_n} = 0$$

gilt unabhängig davon, welcher Satz generalisierter Koordinaten gewählt wird

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L(q, \dot q, t)}{\partial \dot q_n} - \frac{\partial L(q, \dot q, t)}{\partial q_n} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L(q', \dot q', t)}{\partial \dot q'_n} - \frac{\partial L(q', \dot q', t)}{\partial q'_n} = 0$$

Beweis zu oben:

einerseits gilt

$$\dot{x}_j(q',\dot{q}',t) = \sum_n \frac{\partial x_j(q',t)}{\partial q'_n}\,\dot{q}'_n + \frac{\partial x_j(q',t)}{\partial t}$$

andererseits gilt

$$\dot{x}_j(q',\dot{q}',t) = \dot{x}_j\big(q(q',t),\,\dot{q}(q',\dot{q}',t),\,t\big)$$

$$= \sum_m \frac{\partial x_j}{\partial q_m}\,\dot{q}_m + \frac{\partial x_j}{\partial t}$$

$$= \sum_m \frac{\partial x_j}{\partial q_m}(q(q',t),t)\cdot\left[\sum_n \frac{\partial q_m(q',t)}{\partial q'_n}\,\dot{q}'_n + \frac{\partial q_m(q',t)}{\partial t}\right] + \frac{\partial x_j}{\partial t}(q(q',t),t)$$

$$= \sum_n \frac{\partial x_j}{\partial q'_n}(q(q',t),t)\,\dot{q}'_n + \underbrace{\sum_m \frac{\partial x_j}{\partial q_m}(q(q',t),t)\,\frac{\partial q_m(q',t)}{\partial t} + \frac{\partial x_j}{\partial t}(q(q',t),t)}_{\frac{\partial}{\partial t}x_j(q(q',t),t)}$$

$$= \sum_n \frac{\partial x_j}{\partial q'_n}(q',t)\,\dot{q}'_n + \frac{\partial x_j}{\partial t}(q',t)$$

also:

$$\dot{x}(q',\dot{q}',t) = \dot{x}\big(q(q',t),\,\dot{q}(q',\dot{q}',t),\,t\big)$$

q.e.d.

3.5 Nichtholonome Systeme

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & & \text{Ungleichung} \; \lightning \\
 & ZB \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[rr] \arrow[urrr] & & \text{differenziell (nicht integrierbar) ?} & \\
\text{holonom} \arrow[d] \arrow[dr] & \text{differenziell (integrierbar)} \checkmark \arrow[l] & & & \\
\text{skleronom} \checkmark & \text{rheonom} \checkmark & & &
\end{tikzcd}$$

beachte: es gibt keine generalisierten Koordinaten q !

---

betrachte System mit K differenziellen ZB (integrierbar oder nicht):

$$\sum_{j=1}^{3N} a_{sj}(x,t)\, dx_j + b_s(x,t)\, dt = 0 \qquad s = 1,..,K$$

für virtuelle Verrückungen δx_j (momentan, mit ZB verträglich, sonst beliebig) gilt also

$$\sum_{j=1}^{3N} a_{sj}(x,t)\, \delta x_j = 0 \qquad s = 1,..,K \qquad (*)$$

ZB werden durch ZK realisiert:

$$m_j \ddot{x}_j - F_j = Z_j$$

bzw. für konservatives System mit $L = T - U$:

$$\left(= \sum_j \frac{m_j}{2} \dot{x}_j^2 - U(x) \right)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} - \frac{\partial L}{\partial x_j} = Z_j \qquad j = 1,..,3N$$

Prinzip der virtuellen Arbeit $\sum_j Z_j \, \delta x_j = 0$, also

$$\sum_j \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} - \frac{\partial L}{\partial x_j} \right) \delta x_j = 0$$

(die ZK sind damit eliminiert)

beachte: die δx_j sind nicht unabhängig

mit (*) folgt

$$\sum_j \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} - \frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{s=1}^{K} \lambda_s a_{sj} \right) \delta x_j = 0$$

für beliebige $\lambda_s = \lambda_s(x, \dot{x}, t)$, Lagrange-Multiplikatoren

Aufteilung der Summe:

$$\sum_{j=1}^{3N} (\cdots)_j \, \delta x_j = \sum_{j=1}^{3N-K} (\cdots)_j \, \delta x_j + \sum_{j=3N-K+1}^{3N} (\cdots)_j \, \delta x_j$$

K Terme!

wähle λ_s $(s = 1, \ldots, K)$ so, dass

$$(\cdots)_j = 0 \quad \text{für } j = 3N-K+1, \ldots, 3N$$

lineares, inhomogenes Gleichungssystem in den λ_s mit $x, \dot{x}$ - abhängigen Koeffizienten

es folgt also

$$\sum_{j=1}^{3N-K} (\cdots)_j \, \delta x_j = 0$$

$\delta x_1, \dots, \delta x_{3N-K}$ lassen sich als <u>unabhängig</u> voneinander auffassen, denn es können immer $\delta x_{3N-K+1}, \dots, \delta x_{3N}$ gefunden werden, so dass (**) erfüllt ist!

$$(*) \hat{=} (**) : \quad \sum_{j=1}^{3N-K} a_{js} \, \delta x_{j} + \sum_{j=3N-K+1}^{3N} a_{js} \, \delta x_j = 0$$

$K \times K$ lineares, inhomogenes Gleichungssystem in δx_j für $j = 3N-K+1, \dots, 3N$

damit gilt (wegen der Unabhängigkeit der δx_j für $j = 1, \dots, 3N-K$)

$$(\cdots)_j = 0 \qquad \text{für } j = 1, \dots, 3N-K$$

sowieso gilt (wegen der Wahl der λ_s)

$$(\cdots)_j = 0 \qquad \text{für } j = 3N-K+1, \dots, 3N$$

also

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} - \frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{s=1}^{K} \lambda_s a_{sj} = 0 \qquad j = 1, \dots, 3N}$$

(Verallgemeinerung von LI für diff. ZB)

mit $L = \sum_j \frac{1}{2} m_j \dot{x}_j^2 - U(x)$ $\quad F_j = -\frac{\partial U}{\partial x_j}$ ist

$$m_j \ddot{x}_j = F_j + \underbrace{\sum_s \lambda_s a_{sj}}_{Z_j}$$

Rechnung kann also auch als alternative Herleitung von LI aus dem Prinzip der virtuellen Arbeit aufgefasst werden:

falls die ZB integrierbar sind, falls also

$$a_{sj} = \frac{\partial f_s}{\partial x_j} \quad \text{für ein } f_s(x,t) \quad (\text{pro } s)$$

folgt

$$m_j \ddot{x}_j = F_j + \sum_s \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial x_j} \qquad (\mathrm{LI})$$

---

neben den Bewegungsgleichungen sind (zur Festlegung der K Lagrange-Multiplikatoren) die K ZB zu berücksichtigen

$$\sum_j a_{sj} \, dx_j + b_s \, dt = 0$$

bzw.

$$\sum_j a_{sj} \, \dot{x}_j + b_s = 0$$