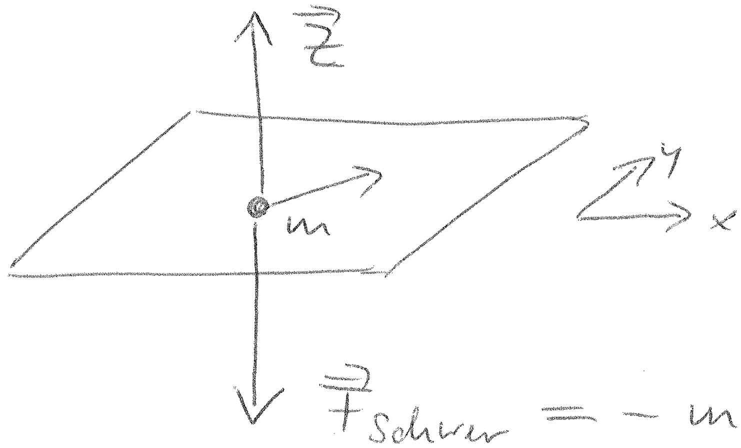
2 d'Alembertsches Prinzip und Lagrange-Gleichungen erster Art

Entwicklung des Formalismus für Systeme mit Zwangsbedingungen (ZB)

2.1 Zwangsbedingungen

Bsp. A: reibungsfreies Gleiten auf waagerechter Platte

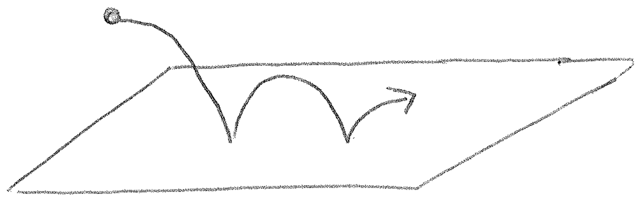


$\vec{F}_{Schwer} = -m\vec{g} \qquad \vec{g} = (0,0,g)$

ZB $z=0$ realisiert durch Zwangskraft (ZK)

$$\vec{Z} = -\vec{F}_{Schwer}$$

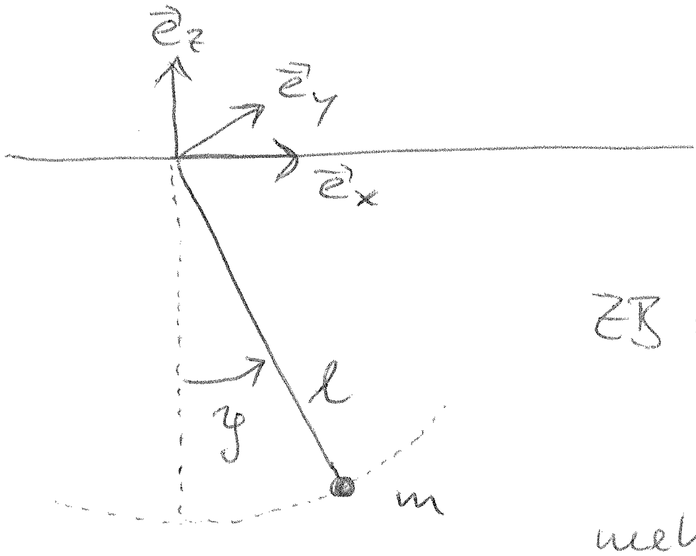
Bsp. B: Hüpfen auf waagerechter Platte



ZB: $z \geq 0$ ZK: ?

Ungleichung!

Bsp. C: ebenes Pendel

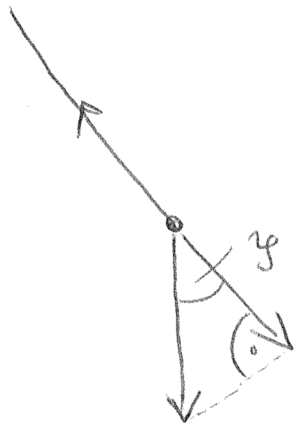


ZB: $x^2 + z^2 = \ell^2$

$y = 0$

mehrere ZB!

ZK:

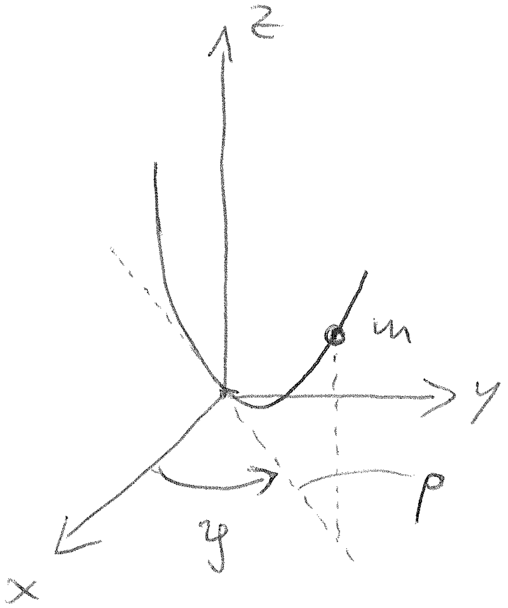


$\vec{Z} = -mg\cos\varphi\,\vec{e}_r$

ZK abhängig vom Bewegungszustand!

$\vec{F}_{schwer} = -mg\,\vec{e}_z$

Bsp. D: Perle auf parabelförmigem Draht, der mit ω um z-Achse rotiert



ZB $\varphi - \omega t = 0$

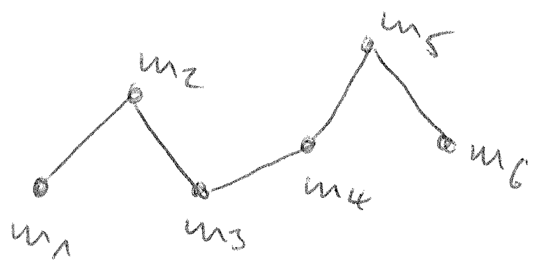
$z - a\rho^2 = 0$

ZB zeitabhängig!

ω, a Parameter

ZK ?

Bsp. E: Kettenstück



Mehr-Teilchen-System

$N = 6$

$K = 5$ ZB

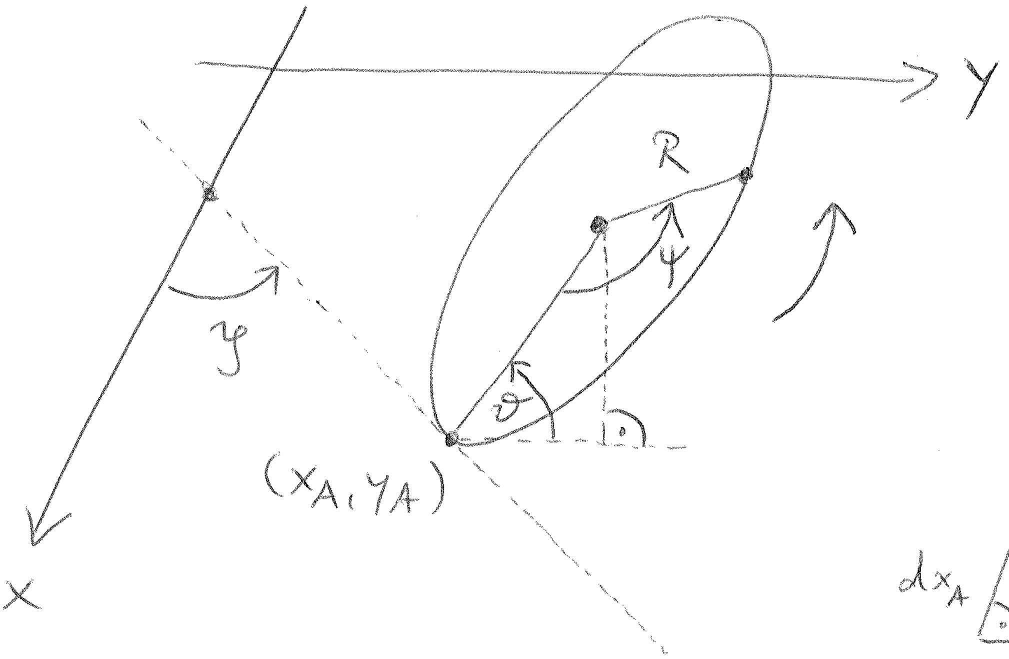
$|\vec{r}_i - \vec{r}_{i-1}| - l_i = 0$

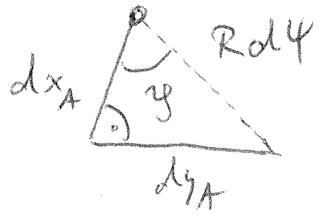
$(i = 2, .., 6)$

mit $x = (x_1, \ldots, x_{3N}) = (\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N)$ sind die ZB von der Form

$$f_s(x_1, \ldots, x_{3N}) = 0 \qquad s = 1, .., K$$

Bsp. F: ohne Schlupf rollende Kreisscheibe





(x_A, y_A) : Auflagepunkt

ψ : Rollwinkel

ϑ : Neigungswinkel

φ : Winkel zwischen Scheibenebene und x-Achse

(bei infinitesimalem Abrollen $d\psi$ ist $\varphi = \text{const}$)

ZB:
$$dx_A + R\,d\psi \cos\varphi = 0$$
$$dy_A + R\,d\psi \sin\varphi = 0 \qquad (K=2)$$

differenziell!

Klassifikation:

ZB

holonom ("ganz gesetzlich")

nicht holonom

skleronom ("starr")

rheonom ("fließend")

holonome ZB

$$f_s(\vec{r}, t) = 0 \qquad s = 1, \dots, K \qquad N = 1$$

$$f_s(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0 \qquad s = 1, \dots, K \qquad N \geq 1$$

oder $$f_s(x_1, \dots, x_{3N}, t) = 0 \qquad s = 1, \dots, K$$

oder $$f_s(x, t) = 0 \qquad s = 1, \dots, K$$

holonom-skleronome ZB

$$f_s(x_1, \dots, x_{3N}) = 0$$ zeitunabhängig

holonom-rheonome ZB

$$f_s(x_1, \dots, x_{3N}, t) = 0$$

Bsp	holonom?	skleronom?	K
A	✓	✓	1
B	×	×	1
C	✓	✓	2
D	✓	×	2
E	✓	✓	5
F	?	?	2

eine holonome ZB

$$f_s(x_1, \ldots, x_{3N}, t) = 0$$

kann differenziell formuliert werden

$$0 = df_s = \frac{\partial f_s}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f_s}{\partial x_{3N}} dx_{3N} + \frac{\partial f_s}{\partial t} dt$$

$$= \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial f_s}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial f_s}{\partial t} dt$$

$$\boxed{0 = \sum_{j=1}^{3N} a_j \, dx_j + b \, dt}$$

mit Funktionen

$$a_j = a_j(x_1, \ldots, x_{3N}, t) = a_j(x, t)$$

$$b = b(x_1, \ldots, x_{3N}, t) = b(x, t)$$

holonome ZB $\longrightarrow$ differenzielle ZB

?

sei eine differenzielle ZB gegeben:

$$\sum_j a_j(x,t)\,dx_j + b(x,t)\,dt = 0$$

Annahme: $\exists\ f(x_1, \dots, x_{3N}, t)$ mit

$$df = \sum_j a_j\,dx_j + b\,dt$$

dann ist ZB $\Leftrightarrow$ $df = 0$ $\Leftrightarrow$ $f - \text{const} = 0$

also ZB holonom

---

f existiert genau dann, wenn die

Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind:

$$\frac{\partial a_j}{\partial x_k} = \frac{\partial a_k}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial a_j}{\partial t} = \frac{\partial b}{\partial x_j} \quad \forall j, k$$

---

vergleiche: gegeben $F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz$

$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}\ \forall i,j \Leftrightarrow \operatorname{rot} \vec{F} = 0 \Leftrightarrow$

$\exists\ V$ mit $dV = -F_x\,dx - F_y\,dy - F_z\,dz \Leftrightarrow$

$\exists\ V$ mit $\vec{F} = -\operatorname{grad} V \Leftrightarrow$

Bsp. 7

$$dx_A + R\cos\gamma\, d\varphi = 0$$
$$dy_A + R\sin\gamma\, d\varphi = 0$$

1. ZB:

$$1 \cdot dx_A + 0 \cdot dy_A + R\cos\gamma\, d\varphi + 0 \cdot d\vartheta + 0 \cdot d\gamma = 0$$

Integrabilitätsbedingungen nicht erfüllt, denn z.B.

$$\frac{\partial(R\cos\gamma)}{\partial\gamma} \neq \frac{\partial(0)}{\partial\varphi}$$

$\rightarrow$ es existiert kein $f(x_A, y_A, \varphi, \vartheta, \gamma, t)$
mit $df = 0 \Leftrightarrow$ 1. ZB
(und somit auch kein f(Kart. Koord.))

$\rightarrow$ ZB nicht holonom

nicht holonome ZB

differenziell und nicht integrierbar

$\Lsh$ werden zunächst nicht weiter betrachtet

Ungleichungen

$\Lsh$ werden nicht weiter betrachtet

---

beachte: diff. ZB $\sum_j a_j\, dx_j + b\, dt = 0$

$$\Leftrightarrow \sum_j a_j(x,t) \cdot \frac{dx_j}{dt} + b(x,t) = 0$$

$$\Leftrightarrow f(x, \dot{x}, t) = 0$$

vergl.: holonome ZB: $f(x,t) = 0$

2.2 Zwangskräfte

NII für Systeme mit ZB:

$$m_j \ddot{x}_j = F_j(x,\dot{x},t) + Z_j(x,\dot{x},t) \qquad j = 1,\dots,3N$$

bekannt

realisieren (bekannte, einfache ZB)

Z_j selbst unbekannt, kompliziert

ZB $\quad f_s(x,t) = 0 \qquad s = 1,\dots,K$

Problem: 3N Unbekannte x_j

3N unbekannte Z_j

aber nur $3N+K$ Gleichungen / DGL

und $K < 3N$

Lösung: Richtung der ZK kann angegeben werden

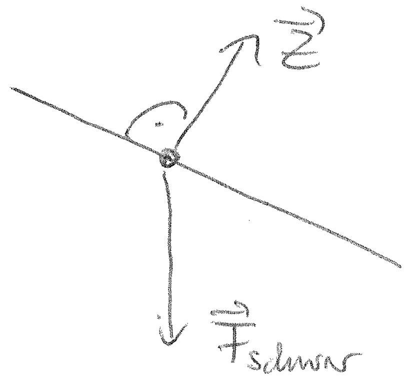
A) $N=1$ Teilchen, $K=1$ holonome ZB

ZB skleronom: $f(\vec r)=0$

realisiert durch ZK $\vec Z$

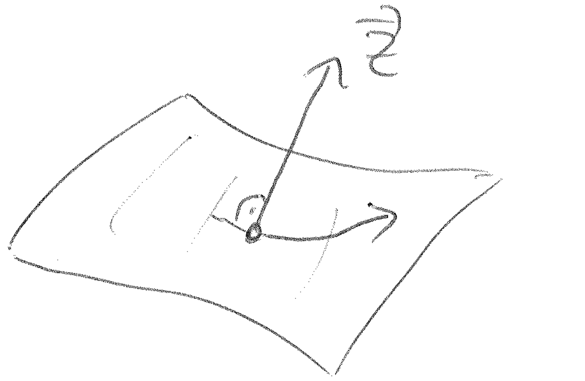
$\vec Z$ so, dass „keine Beeinflussung" der mit der ZB verträglichen Bewegung; $\vec Z$ soll nur die ZB sicherstellen

<u>Bsp</u> schiefe Ebene



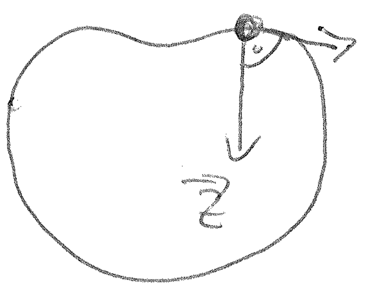
$\vec Z$ beschleunigt das Teilchen nicht!

<u>Bsp:</u> krumme Fläche



Teilchen wird als Folge der ZB beschleunigt (auch ohne äußere Kraft $\vec F$!)

<u>Bsp:</u>



Perle auf Draht (reibungsfrei) ohne äußere Kraft (z.B. Raumschiff-Exp.)

es gilt: $\dot{\vec r}(t_0+T) = \dot{\vec r}(t_0)$
(T: Umlaufzeit)

$\vec Z$ führt zu keiner Tangentialbeschleunigung es gilt stets: $\boxed{\vec{Z} \cdot d\vec{r} = 0}$

$d\vec{r}$: mit ZB verträgliche "Verrückung" des Teilchens

$\Rightarrow \vec{Z} \perp$ Fläche $f(\vec{r}) = 0$

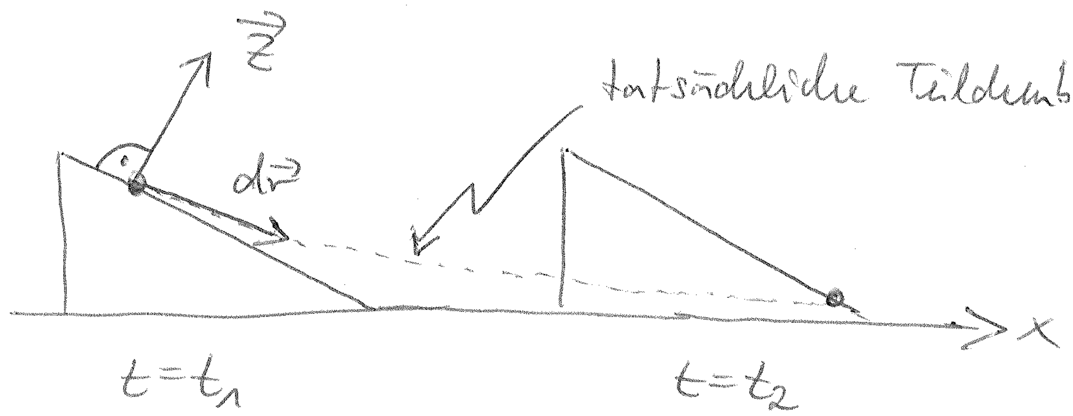
$\Rightarrow \vec{Z} \sim \operatorname{grad} f$

(skleronome) ZK verrichten keine Arbeit

---

rheonome ZB: $f(\vec{r}, t) = 0$

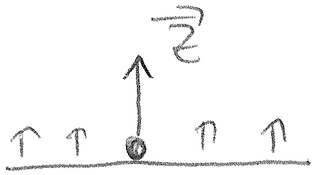
<u>Bsp:</u> bewegte schiefe Ebene



jetzt ist $\vec{Z} \cdot d\vec{r} \neq 0$

die ZK verrichtet reale Arbeit am Teilchen

<u>Bsp:</u> beschleunigtes Anheben einer waagerechten Platte



$\vec{Z} \parallel d\vec{r}$!

jetzt gilt $\boxed{\vec{Z}\,\delta\vec{r} = 0}$ (Prinzip der virtuellen Arbeit)

$\delta\vec{r}$: gedachte, "virtuelle" Verrückung, die momentan mit ZB verträglich ist

also $\vec{Z} \perp$ Fläche $f(\vec{r},t)=0$ (t fest)

$\Rightarrow \quad \vec{Z} \sim \mathrm{grad}_{\vec{r}}\, f(\vec{r},t)$

Die ZK einer holonomen ZB verrichtet keine

$\left.\begin{array}{l}\text{reale}\\ \text{virtuelle}\end{array}\right\}$ Arbeit, falls ZB $\left\{\begin{array}{l}\text{skleronom}\\ \text{rheonom}\end{array}\right.$

NA: $\quad m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r},\dot{\vec{r}},t) + \lambda(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)\cdot \mathrm{grad}\, f(\vec{r},t)$

ZB $\quad f(\vec{r},t) = 0$

4 Gleichungen / DGL für 4 Unbekannte $(\vec{r},\lambda)$

B $\quad N=1$, $K=2$

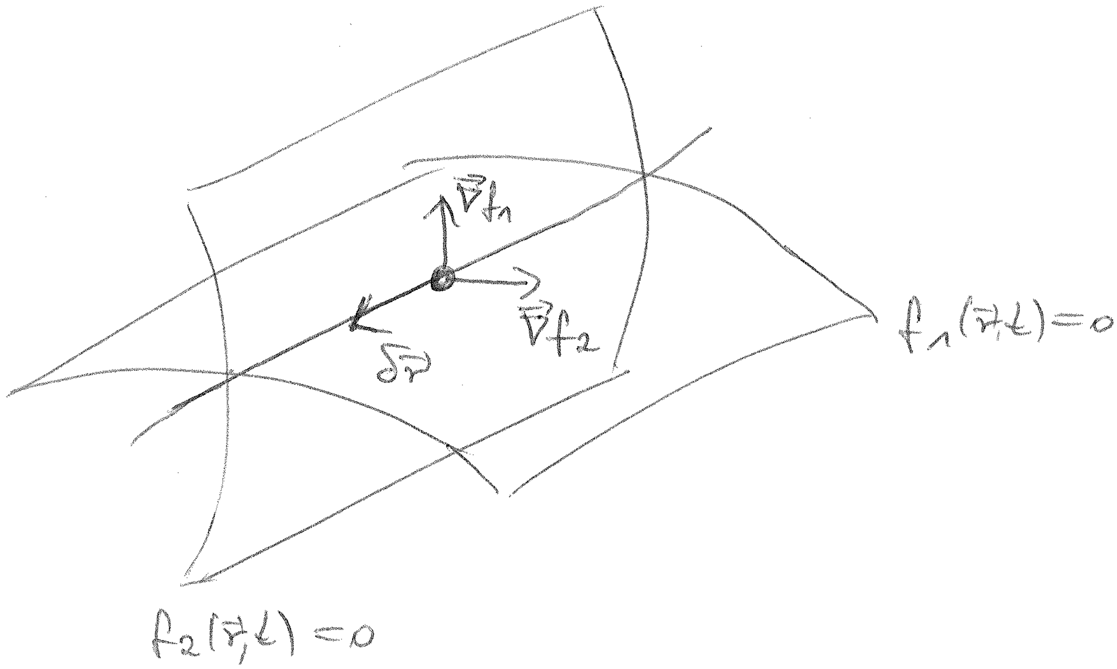
ZBen: $\quad f_1(\vec{r},t)=0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{grad}\, f_1 \perp$ Fläche $f_1=0$

$\quad f_2(\vec{r},t)=0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{grad}\, f_2 \perp$ Fläche $f_2=0$

Teilchen bewegt sich auf Kurve $f_1=0$, $f_2=0$ (Schnitt der Flächen), falls ZB skleronom, sonst

$ZK \perp \delta\vec{r}$ heißt

$$\vec{Z} = \lambda_1 \operatorname{grad} f_1(\vec{r},t) + \lambda_2 \operatorname{grad} f_2(\vec{r},t)$$



allgemein

$$\vec{Z}(\vec{r},\dot{\vec{r}},t) = \sum_{s=1}^{K} \lambda_s(\vec{r},\dot{\vec{r}},t) \operatorname{grad} f_s(\vec{r},t)$$

es gilt:

$$\boxed{\vec{Z}\cdot\delta\vec{r} = 0}$$

beachte: 2 weitere Unbekannte (λ_1, λ_2)
neben $\vec{r}$, aber auch 2 ZB !

c) $N=2$, $K=1$

zB $f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = 0$

es gilt

$\vec{Z}_1 \perp$ Fläche $f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = 0$ ($\vec{r}_2, t$ fest)

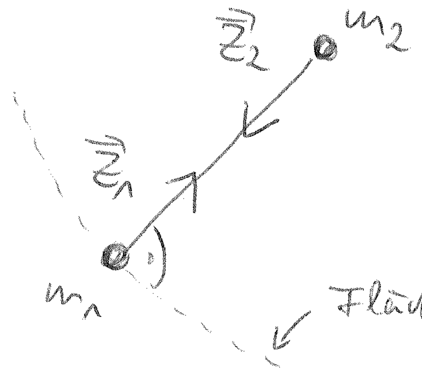
$\vec{Z}_2 \perp$ Fläche $f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = 0$ ($\vec{r}_1, t$ fest)

also,

$$\boxed{\vec{Z}_i = \lambda_i \, \mathrm{grad}_i f}$$

Bsp Hantel

$$f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 - \ell^2 = 0$$



es gilt:

$$\vec{Z}_1 = \lambda_1 \vec{\nabla}_1 f(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = -\lambda_1 \vec{\nabla}_2 f(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

$$\vec{Z}_2 = \lambda_2 \vec{\nabla}_2 f(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

mit N $\underline{\underline{\text{III}}}$ folgt ($\vec{Z}_1 \stackrel{!}{=} -\vec{Z}_2$):

$$\boxed{\lambda_1 = \lambda_2}$$

allgemein ist für $(N \geq 1)$

<u>innere ZK:</u> $f = f(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$, $\vec{Z}_i = -\vec{Z}_j$

$$\vec{Z}_i = \lambda \, \text{grad}_i f$$

λ unabhängig von i

<u>äußere ZK:</u> $f = f(\vec{r}_i)$

$$\vec{Z}_i = \lambda \, \text{grad}_i f \quad (\text{trivial denn } \vec{Z}_j = 0)$$

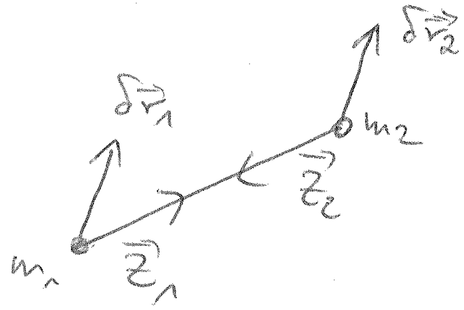
---

virtuelle Arbeit

$$\delta W = \sum_{i=1}^{N} \vec{Z}_i \delta \vec{r}_i$$
$$= \sum_{i=1}^{N} \lambda \, \text{grad}_i f \cdot \delta \vec{r}_i$$
$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial \vec{r}_i} \cdot \delta \vec{r}_i \cdot \lambda$$
$$= \lambda \cdot \delta f \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta W = 0}$$

(beachte $\delta t = 0$; $df = \delta f + \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \cancel{dt}$)

<u>Bsp</u> Hantel



hier (mit ZB verträglich !)

$$\delta \vec{r}_1 = \delta \vec{r}_2$$

$$\delta W = \vec{Z}_1 \delta \vec{r}_1 + \vec{Z}_2 \delta \vec{r}_2 = 0$$

aber

$$\vec{Z}_1 \delta \vec{r}_1 , \vec{Z}_2 \delta \vec{r}_2 \neq 0 \quad !$$

allgemein wird postuliert für

N Teilchen $\quad i = 1, \dots, N$

K ZB $\quad s = 1, \dots, K \qquad f_s(x_1, \dots, x_{3N}, t) = 0$

dass

$$\vec{Z}_i = \sum_{s=1}^{K} \lambda_s \, \mathrm{grad}_i \, f_s$$

unabhängig vom Teilchenindex

bzw.

$$\boxed{Z_j(x, \dot{x}, t) = \sum_{s=1}^{K} \lambda_s(x, \dot{x}, t) \frac{\partial}{\partial x_j} f_s(x, t) \qquad j = 1, \dots, 3N}$$

es gilt

$$\begin{aligned}
\delta W &= \sum_i \vec{Z}_i \, \delta\vec{r}_i = \sum_j Z_j \, \delta x_j \\
&= \sum_j \sum_s \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial x_j} \delta x_j \\
&= \sum_s \lambda_s \sum_j \frac{\partial f_s}{\partial x_j} \delta x_j \\
&= \sum_s \lambda_s \, \delta f_s \qquad (\delta t = 0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_i \vec{Z}_i \delta \vec{r}_i = 0}$$

Prinzip der virtuellen Arbeit
(ZK verrichten keine virt. Arbeit)

$\delta \vec{r}_i$:
- infinitesimal
- momentan ($\delta t = 0$)
- mit ZB verträglich
- virtuell (gedacht, entsprechen nicht der tatsächlichen Teilchenbahn)

mit $m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{Z}_i$ folgt

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i \right) \delta \vec{r}_i = 0}$$

d'Alembertsches Prinzip

(Postulat an die Form der ZK)

2.3 Lagrange-Gleichungen erster Art

N Teilchen

K holonome ZB

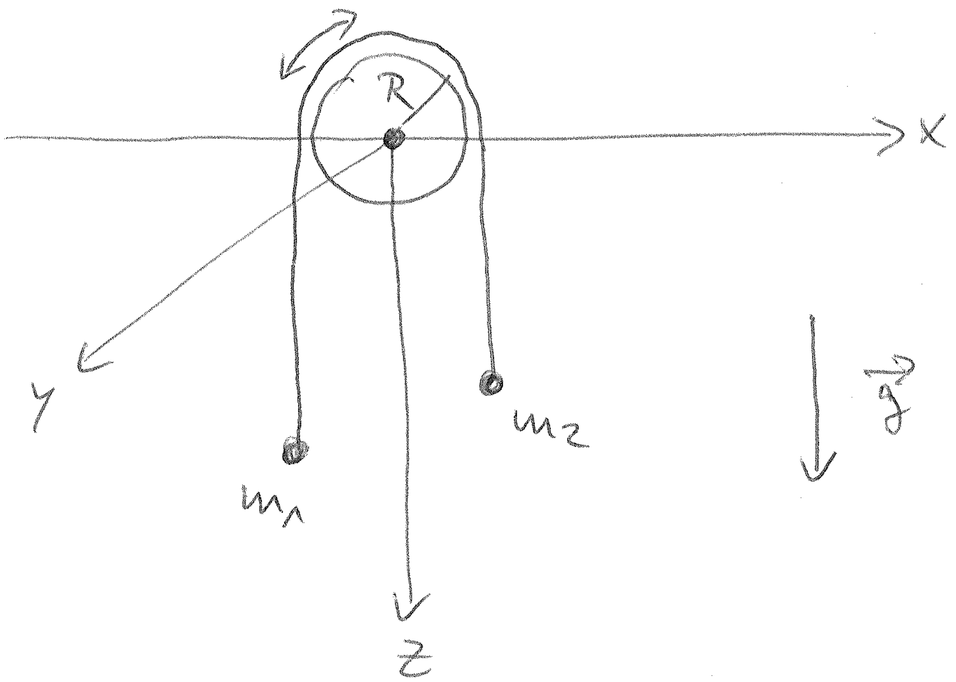
LI:

$$\boxed{\begin{aligned} &m_j \ddot{x}_j = F_j(x,\dot{x},t) + \sum_{s=1}^{K} \lambda_s(x,\dot{x},t) \frac{\partial}{\partial x_j} f_s(x,t) \\ &f_s(x,t) = 0 \qquad s = 1,\dots,K \qquad\qquad j = 1,\dots,3N \end{aligned}}$$

3N + K Gleichungen / DGL

3N + K Unbekannte: x_j, λ_s

Anwendungsbeispiel: Atwoodsche Fallmaschine



1) Formulierung der ZB

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = -R \\ x_2 = R \\ y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \end{array}\right\}$$ trivial (Bewegung entlang z)

$z_1 + z_2 = l = \text{const}$ (mit $l = L - \pi R$,
L: Seillänge)

effektiv: 2+1 Glgen. für z_1, z_2, λ $(K=1)$
statt 6+5 Glgen für $x_1, \ldots, z_2, \lambda_1, \ldots, \lambda_5$ $(K=5)$

2) Aufstellen von LI

$$m_1 \ddot{z}_1 = F_1 + \lambda \frac{\partial}{\partial z_1} f(z_1, z_2, t)$$
$$m_2 \ddot{z}_2 = F_2 + \lambda \frac{\partial}{\partial z_2} f(z_1, z_2, t)$$

es ist:

$$f(z_1, z_2, l) = z_1 + z_2 - l$$

$$F_1 = m_1 g$$

$$F_2 = m_2 g$$

also:
$$m_1 \ddot{z}_1 = m_1 g + \lambda$$
$$m_2 \ddot{z}_2 = m_2 g + \lambda$$
$$z_1 + z_2 - l = 0$$

3) zB zweimal differenzieren (nach t)

$$\ddot{z}_1 + \ddot{z}_2 = 0$$

4) Bewegungsgleichungen einsetzen

$$\frac{m_1 g + \lambda}{m_1} + \frac{m_2 g + \lambda}{m_2} = 0$$

5) Auflösen nach λ

$$\lambda = -2g \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

6) Einsetzen in Bewegungsgleichungen

$$m_1 \ddot{z}_1 = m_1 g - 2g \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad \ddot{z}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

$$m_2 \ddot{z}_2 = m_2 g - 2g \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad \ddot{z}_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g$$

7) Lösen der Bewegungsgleichungen

$$z_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \frac{1}{2} t^2 + c_1 t + d_1$$

$$z_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g \frac{1}{2} t^2 + c_2 t + d_2$$

c_1, c_2, d_1, d_2 Integrationskonstanten

8) Bestimmung der ZK

$$\vec{Z}_1 = \lambda \frac{\partial}{\partial z_1} f \cdot \vec{e}_z = -2g \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{Z}_2 = \vec{Z}_1 = \lambda \frac{\partial}{\partial z_2} f \cdot \vec{e}_z$$

9) Festlegen der Integrationskonstanten

Anfangsbedingungen

$$z_1(t_0) = z_{1,0}$$

$$\dot{z}_1(t_0) = \dot{z}_{1,0}$$

ZB z. Zt. t_0

$$z_1(t_0) + z_2(t_0) - l = 0$$

$$\dot{z}_1(t_0) + \dot{z}_2(t_0) = 0$$

beachte:

ZB $f(z_1, z_2)$ nicht von der Form $f(z_1 - z_2)$

und daher $\vec{Z}_1 \neq -\vec{Z}_2$

Prinzip der virtuellen Arbeit

$$Z_1 \delta z_1 + Z_2 \delta z_2 = Z_1 (\delta z_1 + \delta z_2) = 0$$

erfüllt, denn $\delta z_1 = -\delta z_2$

Schritte 1–9 sind <u>allgemeines</u> Konzept!

ZB: $f_s(x,t) = 0$ zweimal differenzieren:

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_j \frac{\partial f_s}{\partial x_j}(x,t)\cdot \dot{x}_j + \frac{\partial f_s}{\partial t}(x,t)\right] = 0$$

$$\sum_j \frac{\partial f_s}{\partial x_j}\ddot{x}_j + \sum_{jj'} \frac{\partial^2 f_s}{\partial x_{j'}\partial x_j}\dot{x}_{j'}\dot{x}_j + \frac{\partial^2 f_s}{\partial t^2} + \sum_j \frac{\partial^2 f_s}{\partial x_j \partial t}\dot{x}_j = 0$$

also:

$$\sum_j \frac{\partial f_s}{\partial x_j}(x,t)\cdot \ddot{x}_j = R_s(x,\dot{x},t)$$

restliche Terme

Bewegungsgleichung einsetzen

somit

$$\sum_j \frac{\partial f_s}{\partial x_j}(x,t)\frac{1}{m_j}\left(F_j(x,\dot{x},t) + \sum_s \lambda_s(x,\dot{x},t)\frac{\partial f_s}{\partial x_j}(x,t)\right) = R_s(x,\dot{x},t)$$

lineares, inhomogenes Gleichungssystem in den λ_s
(K Gleichungen für K Unbekannte)

$$\Rightarrow \quad \lambda_s = \lambda_s(x,\dot{x},t)$$

$$\Rightarrow \quad m_j\ddot{x}_j = F_j(x,\dot{x},t) + \sum_s \lambda_s(x,\dot{x},t)\frac{\partial f_s(x,t)}{\partial x_j}$$

bekannt

✓