Die Chaostheorie

Das mechanistische Naturbild

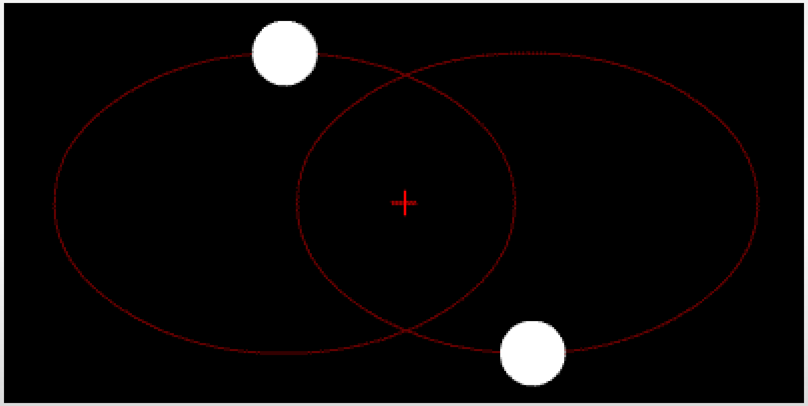
- Gründet vor allem auf Newtons Entdeckungen und der Berechnung des Zweikörperproblems
- Die Zustandsentwicklung eines Systems ist **vollständig** determiniert und berechenbar
- Es gibt keinen Unterschied zwischen Vergangenheit und Zukunft

  → *keine ”Historizität”*
- Die *”Unvollkommenheit des menschlichen Geistes”* erfordert Wahrscheinlichkeit und Zufall

Das Zweikörperproblem

- Betrachtet die Wechselwirkung zweier Körper, ohne äußere Einflüsse
- Ist Analytisch mit Differentialgleichungen lösbar
  - Bewegung für **jeden** Zeitpunkt bestimmbar, sofern die Anfangsbedingungen bekannt sind
- Existiert nur in Sonderfällen
  - z.B. Doppelsterne ohne Planeten, Wasserstoffatom

  $\rightarrow$ Es wurde nach der Lösung des ”Dreikörperproblems” gesucht

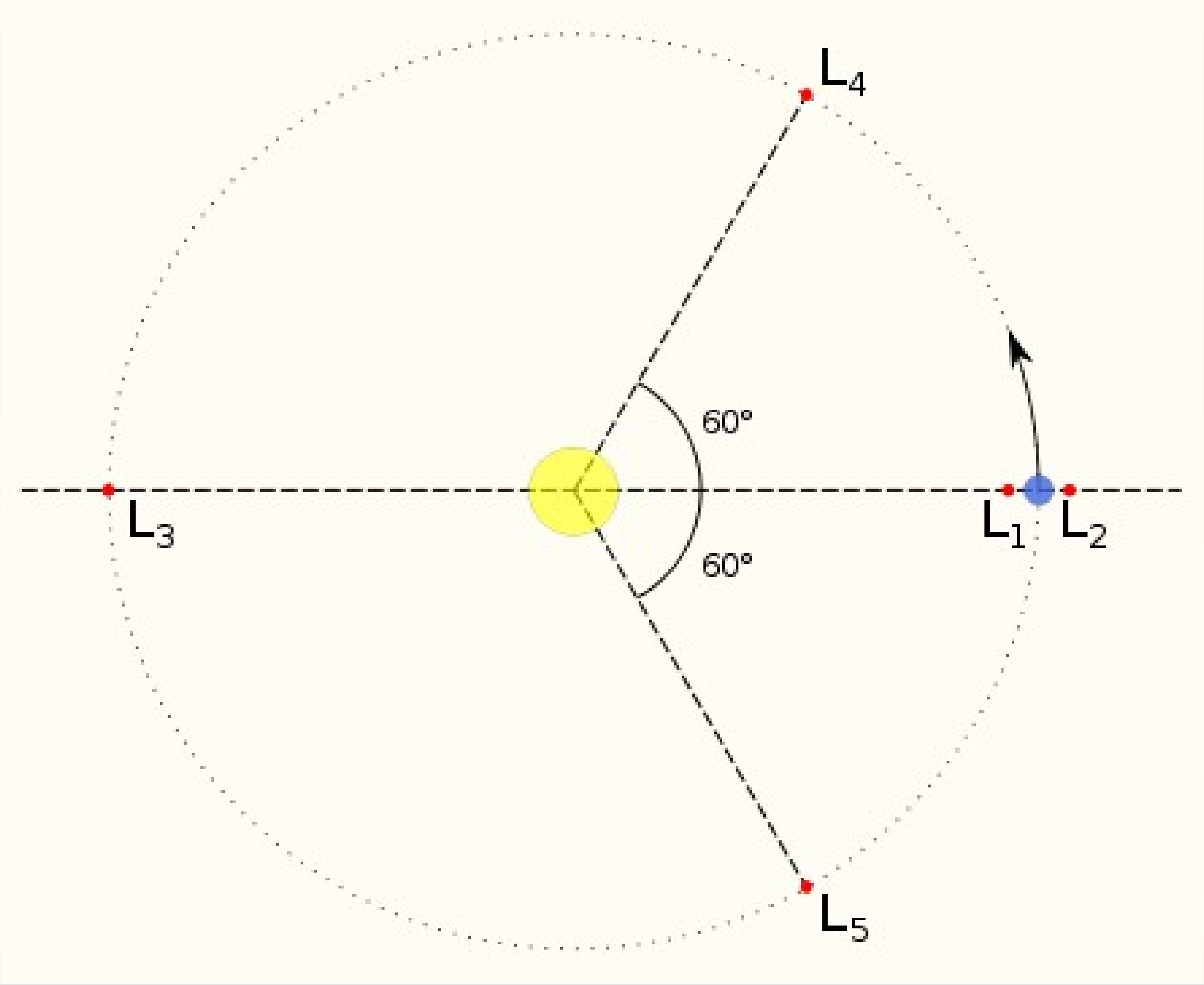


Das Dreikörperproblem

- Galt als eines der schwierigsten mathematischen Probleme
  - Wurde über Jahrhunderte von vielen bekannten Mathematikern untersucht z.B. Leonhard Euler
- Henri Poincaré bewies, dass eine allgemeine Lösung **nicht** möglich ist
  - Nur numerische Integrationsverfahren liefern eine **näherungsweise** Lösung

    → nicht jedes System ist vollständig determiniert

Die Lagrange-Punkte



Entdeckung des Chaos

- Beweis, dass ein System mit mindestens drei Körpern nicht Analytisch berechenbar und sehr empfindlich auf Veränderung der Anfangsbedingungen reagiert durch Henri Poincaré
- Nachweis der **Historizität** eines Systems durch die Thermodynamik
  - Die Entropie kann unter ”normalen Bedingungen” nur zunehmen
- Entdeckung des ”Schmetterlingseffektes”

Der Schmetterlingseffekt

- Entdeckt durch Edward Lorenz in 1963
- Durch Rundung vollkommen anderes Ergebnis bei Berechnung eines mathematischen Klimamodells
- "Der Flügelschlag eines Schmetterlings am Amazonas kann einen Wirbelsturm in Florida auslösen"
- Berechnung des ”Lorenz-Attraktors”

  → Edward Lorenz: *”Vater der Chaostheorie”*

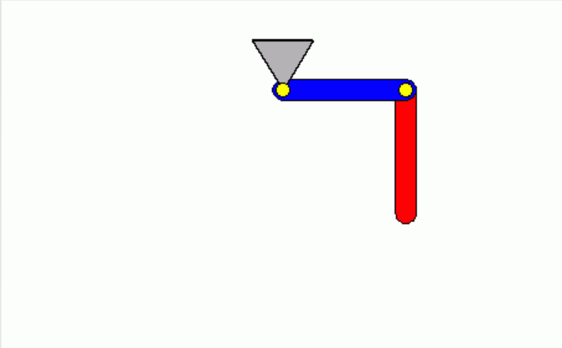
Die Chaostheorie

- "Theorie nichtlinearer dynamischer Systeme"
- Eigenschaften dieser Systeme sind:
  - Sie sind nur über einen bestimmten Zeitraum Näherungsweise vorhersagbar
  - Selbst geringste Abweichungen der Anfangsbedingungen verändern das Gesamte Verhalten des Systems nach einer bestimmten Zeit
    - Der Fehler wächst ins ”unendliche”
  - Trotzdem prinzipiell berechenbar

  → ”deterministisches Chaos”

Das Doppelpendel

- Einfaches Beispiel für die Eigenschaften chaotischer Systeme
  - Reagiert auf Störungen sehr empfindlich
  - Kurze Vorhersagbarkeit



- Wird durch folgende Bewegungsgleichung beschrieben:
  - 1.Pendel φ1:

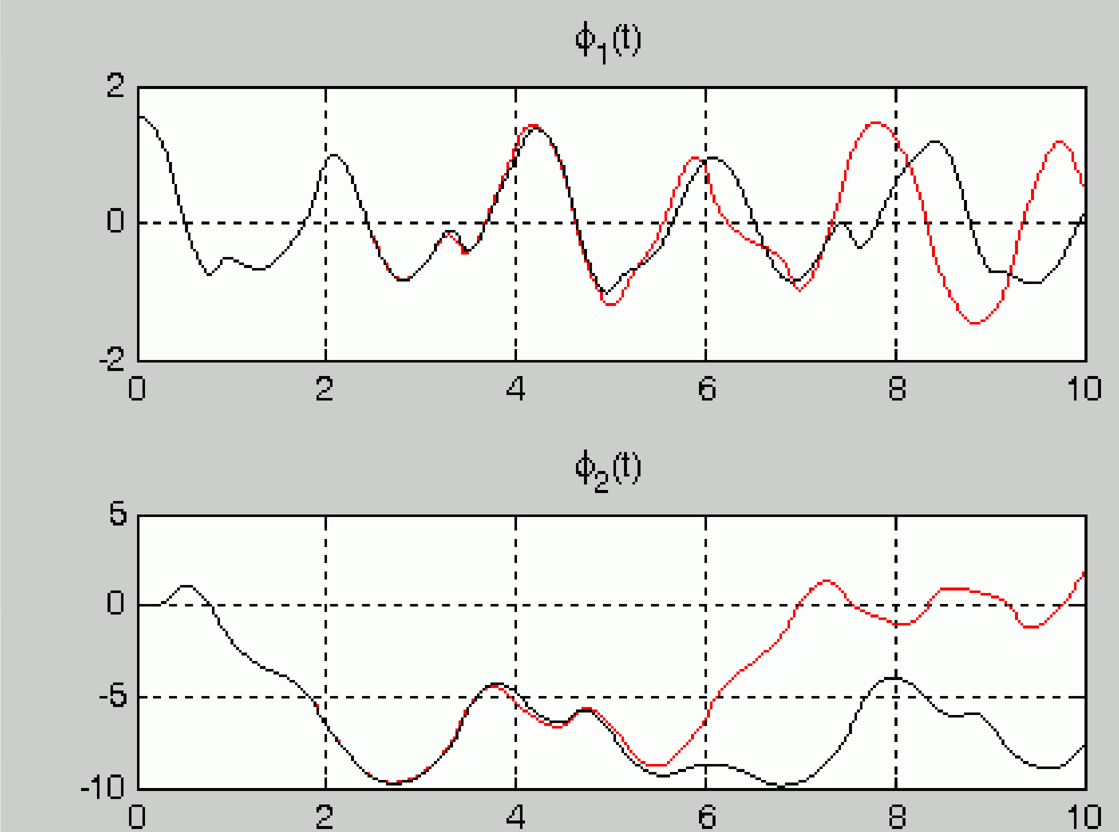
$$(m_1+m_2)\,l_1\ddot{\varphi}_1+m_2l_2\ddot{\varphi}_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)+m_2l_2\dot{\varphi}_2^2\sin(\varphi_1-\varphi_2)+g\,(m_1+m_2)\sin\varphi_1=0$$

  - 2.Pendel φ2:

$$m_2l_2\ddot{\varphi}_2+m_2l_1\ddot{\varphi}_1\cos(\varphi_1-\varphi_2)-m_2l_1\dot{\varphi}_1^2\sin(\varphi_1-\varphi_2)+gm_2\sin\varphi_2=0$$

Doppelpendel : Sensitivität auf Anfangsbedingungen

- Veränderung der Anfangsbedingungen:
  - φ1(t=0)=π/2
  - φ1(t=0)=1.571



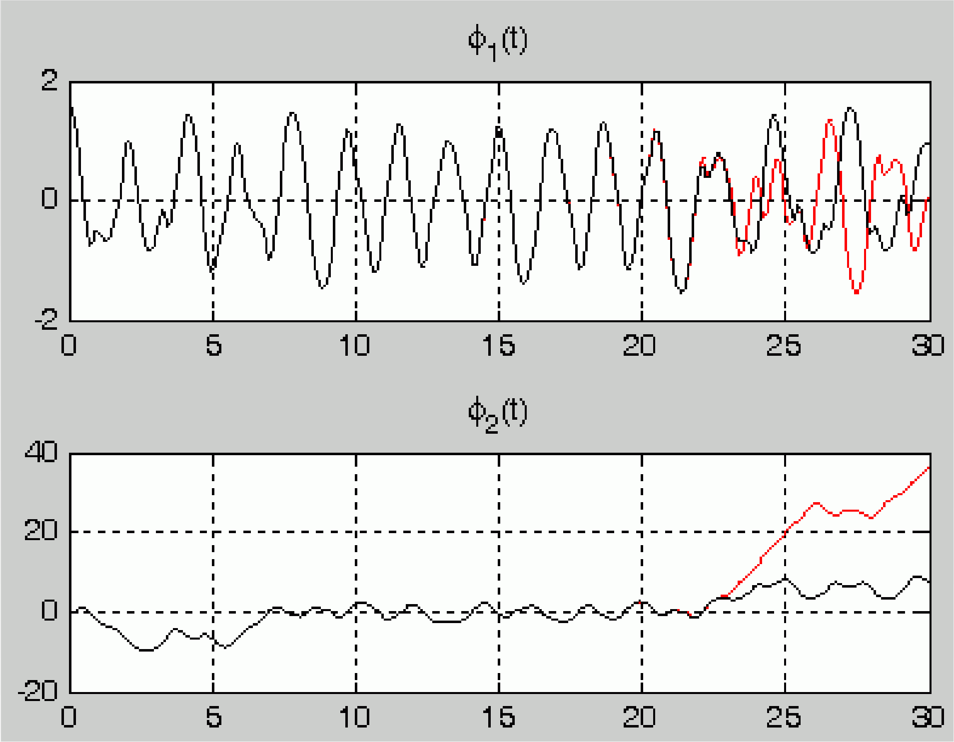
→ Trotz der geringen Abweichung von **0,0065%** stark Verändertes Ergebnis

Problem der Messungenauigkeit

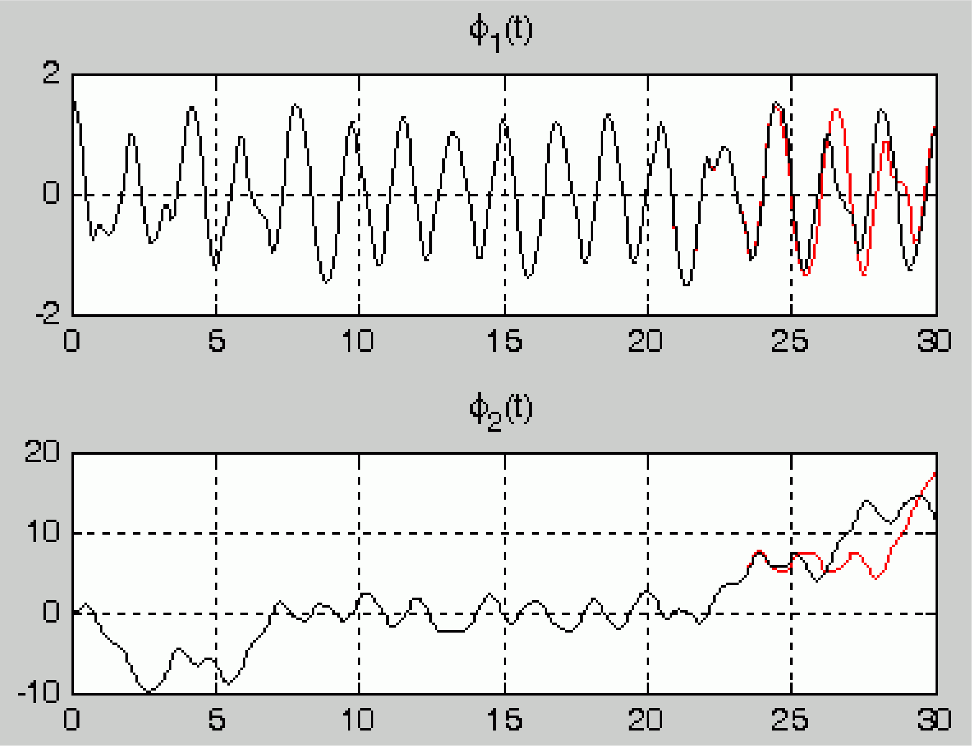
- In keinem Experiment lassen sich die Anfangswerte **”exakt”** bestimmen
  - Im Prinzip kann man nur sagen, dass man in einem Bestimmten bereich **nicht** ist
- z.B. π = 3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74944 59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679 …

Doppelpendel: Grenzen der Vorhersagbarkeit

120 012 Zeitschritte:



1 200 004 Zeitschritte:



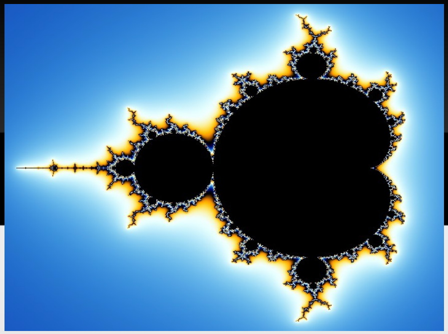
Problem der Zeitskala

- Der Mensch betrachtet nur für ihn interessanten Zeitraum t_m
- Sog. Lyapunov-Zeiten t_{lyap} betrachten Zeitraum des Naturgeschehens
- 3 Fälle möglich
  - $t_m << t_{lyap}$
  - $t_m \sim t_{lyap}$
  - $t_m >> t_{lyap}$

Erkenntnisse der Chaosforschung

- Chaotische Systeme zeigen bestimmte Verhaltensmuster
  - Rückkopplungen, Iteration, Intermittenzen, Selbstähnlichkeit, Seltsame Attraktoren, Bifurkation
- Chaotische Systeme aus unterschiedlichen Bereichen laufen unter gleichen Gesetzmäßigkeiten ab

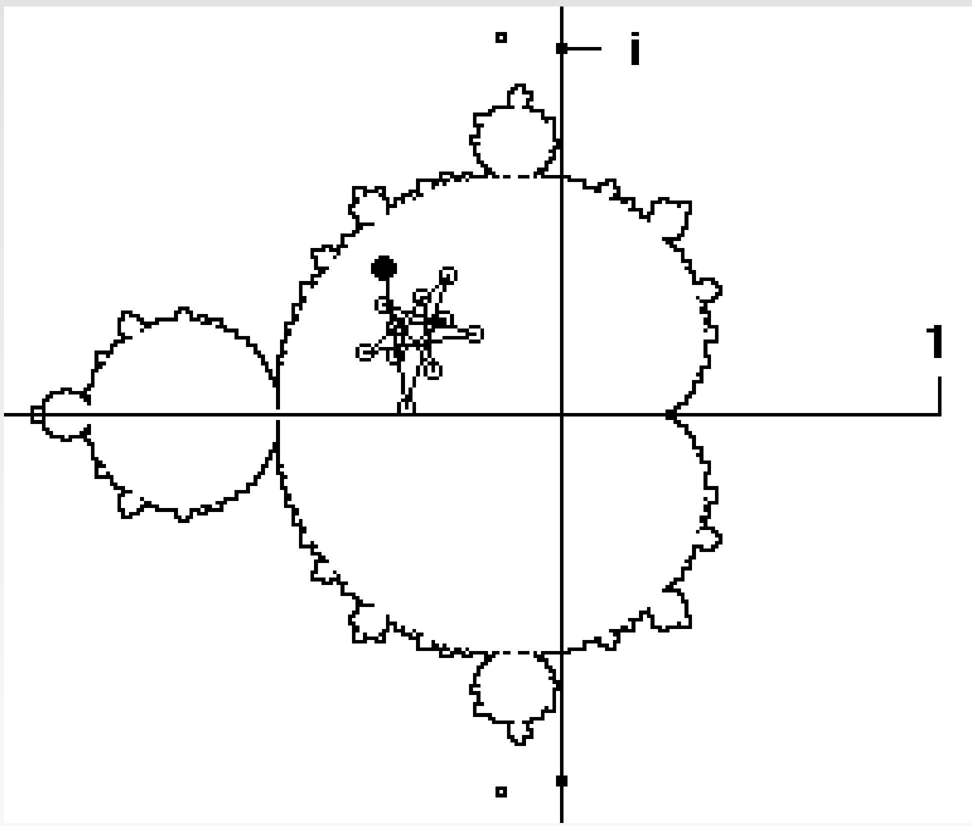
Fraktale

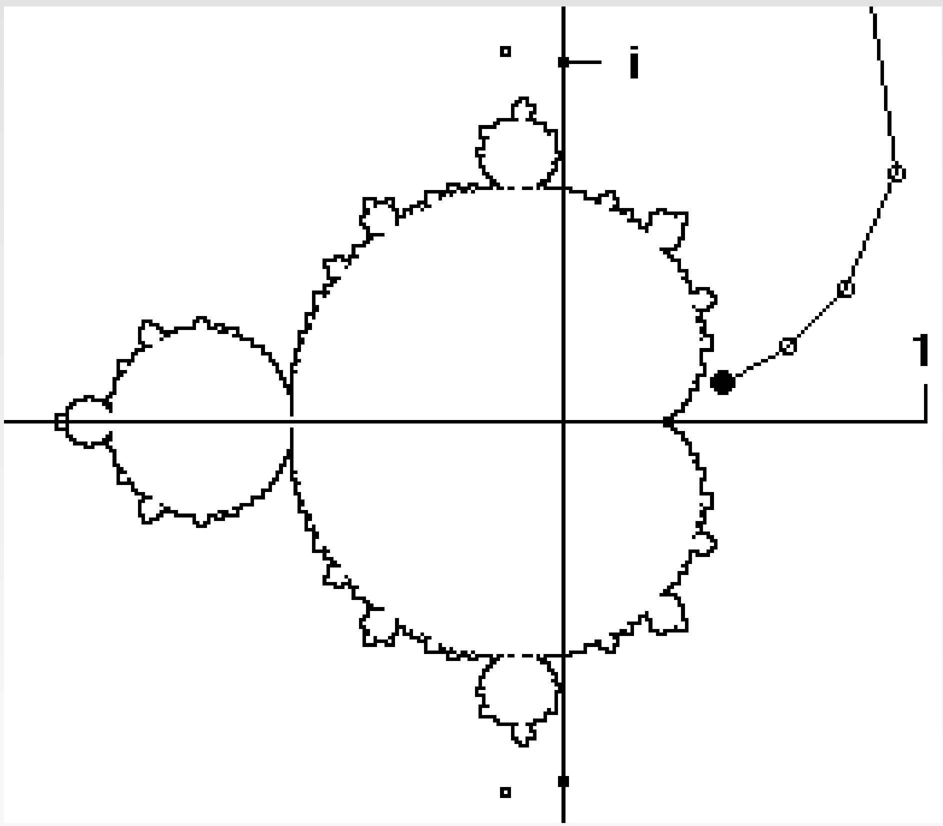


- ”Wolken sind keine Kugeln, Berge keine Kegel, Küstenlinien keine Kreise. Die Rinde ist nicht glatt - und auch der Blitz bahnt sich seinen Weg nicht gerade."
  - Aus der Einleitung zu Mandelbrots Buch ”Die fraktale Geometrie der Natur"
- Von lateinisch *frangere* ”(in Stücke zer)brechen”
- Struktur eines natürlichen Fraktals lässt sich entschlüsseln
  - Mit Hilfe von Computermodellen ist ein exater ”Nachbau” möglich

Mandelbrot-Menge

- $z \to z^2 + C$





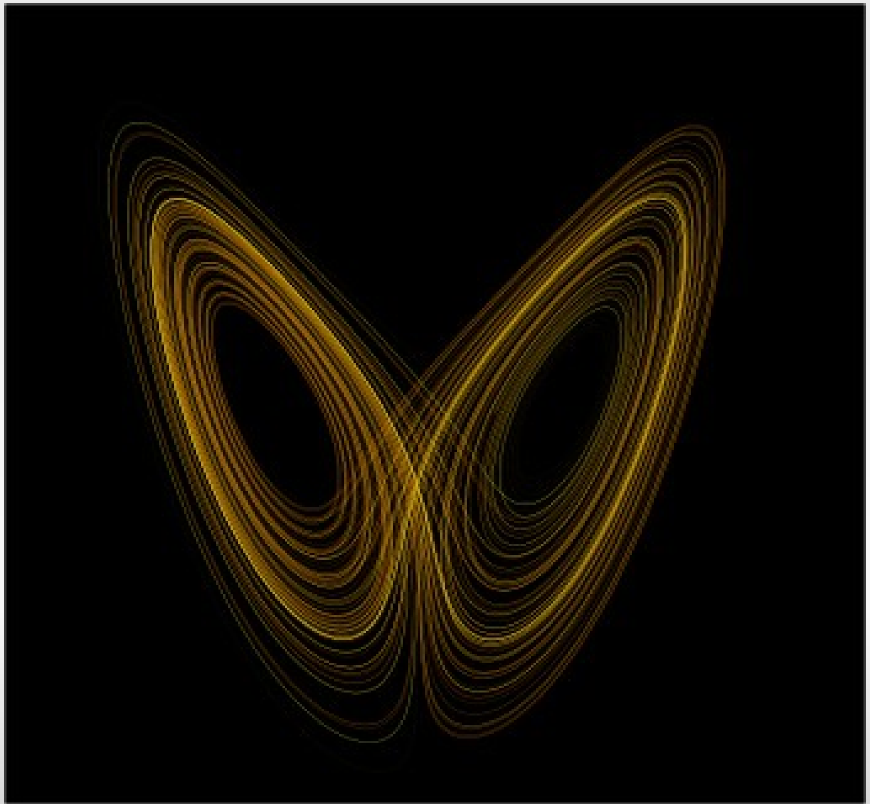
Attraktoren

- Manche Systeme streben mit verschiedenen Anfangsbedingungen zu demselben Verhalten
  - Sie konvergieren zu einer bestimmten Bahn, dem Attraktor
- Bei einem Pendel ist das z.B. Ein Fixpunkt
- Attraktoren können auch chaotisches Verhalten zeigen, diese werden dann als ”Seltsame Attraktoren” bezeichnet

Lorenz-Attraktor

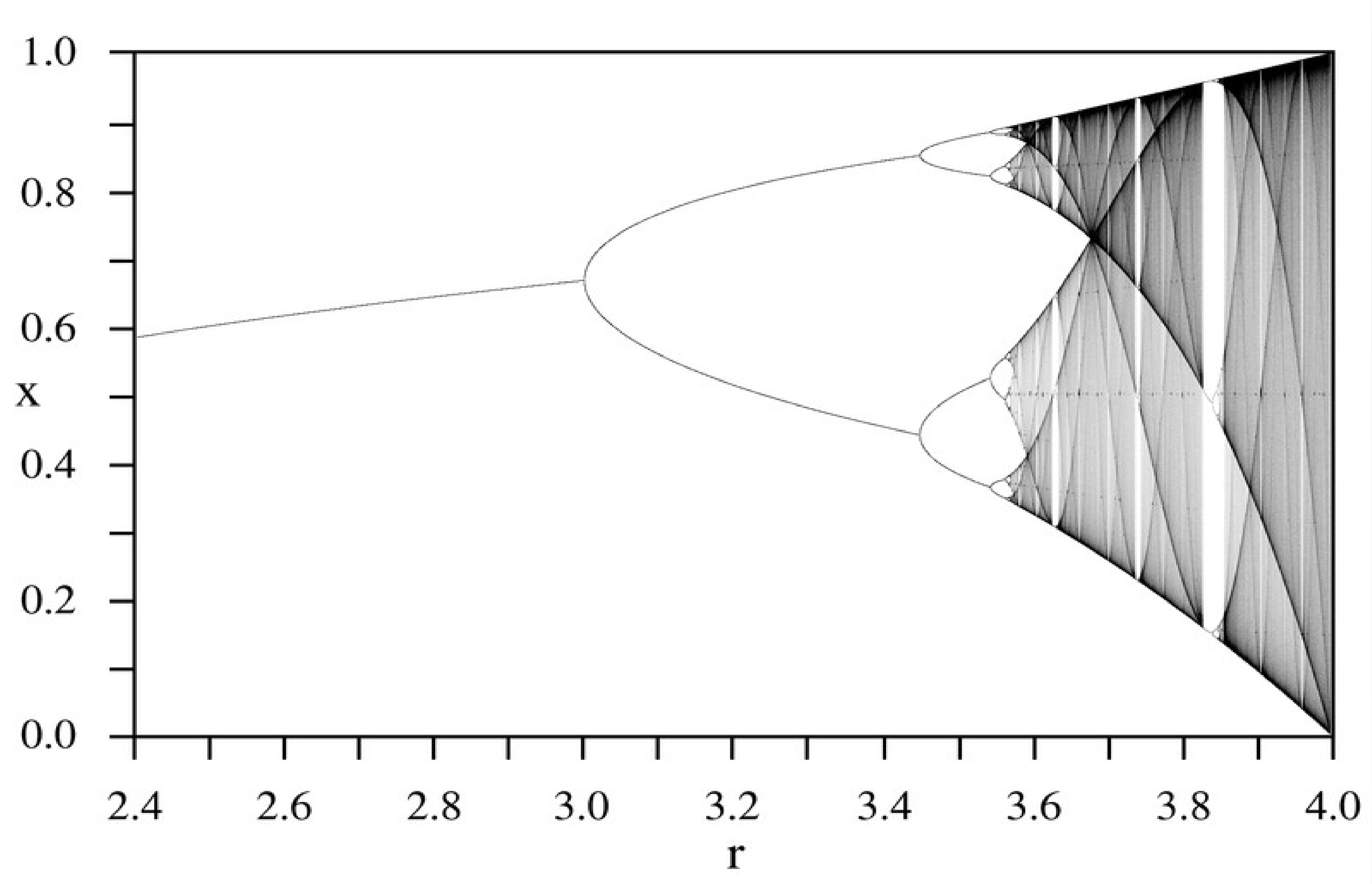
- Beischreibt Turbulenzen bei Luftströmungen
- Verhalten des Systems lässt sich so auf einen Bereich abgrenzen
- Berechnung durch 3 gekoppelte Differenztialgleichungen:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= -xz + rx - y \\ \dot{z} &= xy - bz\end{aligned}$$

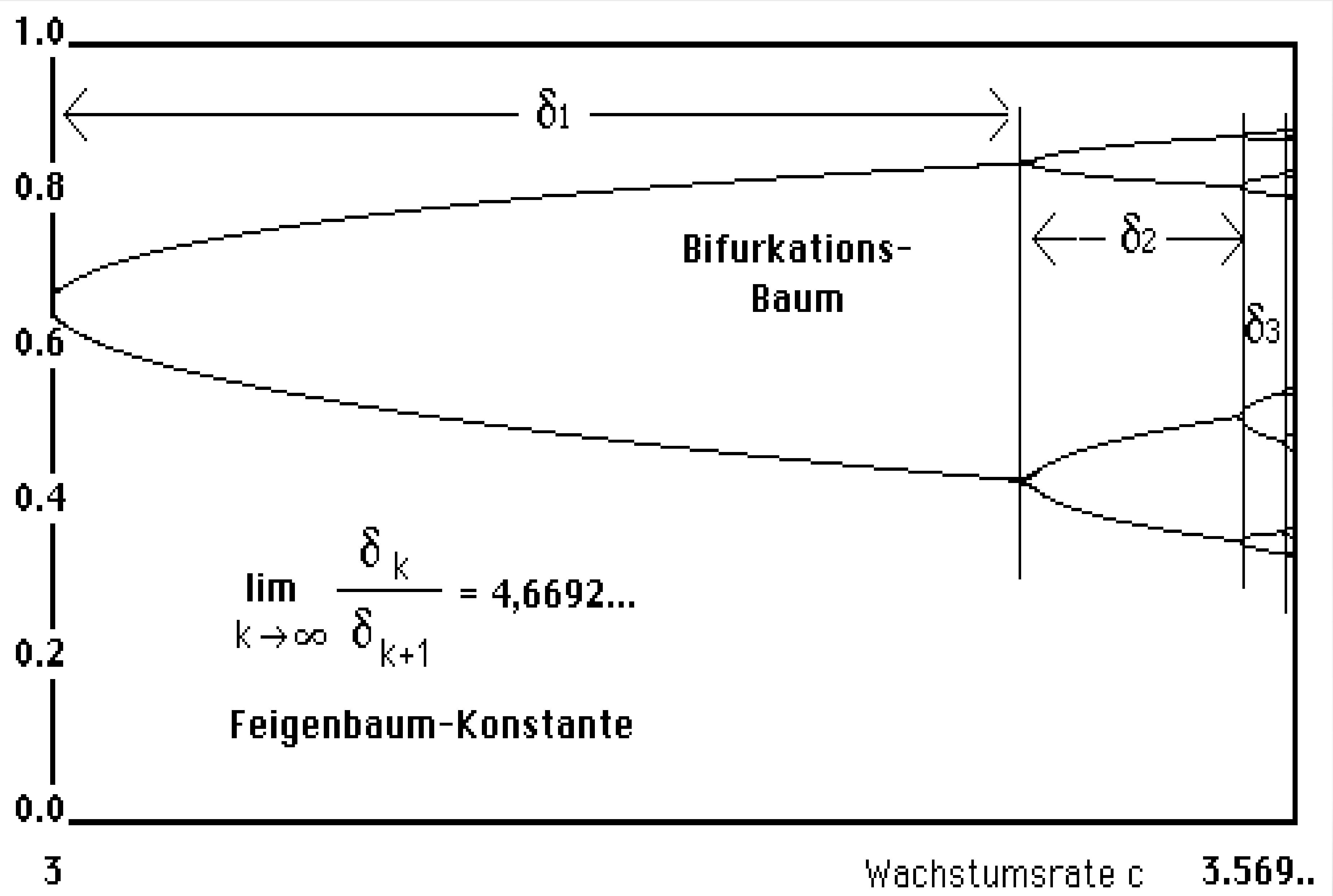


- Dabei gilt: σ=10,r=8/3,b=28

Bifurkation



Feigenbaumkonstante



Quellenverzeichnis

http://www.tm-aktuell.de/TM5/Doppelpendel/doppelpendel_grenzen.html

http://www.weltderphysik.de/de/1447.php

http://de.wikipedia.org/wiki/Chaosforschung

http://de.wikipedia.org/wiki/Zweikörperproblem

http://www.eberl.net/chaos/Sem/Krause/D_index.html#1

www.jgiesen.de/Divers/ChaosVortrag/Chaos.pdf

www.stefre.de/Grundlagen_der_Chaostheorie.pdf