

Übungen zur Quantentheorie der Vielteilchensysteme

Aufgabe 36 — RPA

Betrachten Sie das Hubbard-Modell für wechselwirkenden Fermionen

$$\mathcal{H} = \sum_{ij\sigma} (t_{ij} - \mu\delta_{ij}) c_{i\sigma}^\dagger c_{j\sigma} + \frac{U}{2} \sum_{i\sigma} n_{i\sigma} n_{i-\sigma}$$

und die folgende diagrammatisch definierte Näherung für die Selbstenergie $\Sigma_{ij}(i\omega_n)$:

$$-\Sigma = \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \bullet \quad \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \bullet \quad \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \bullet \quad \bullet \end{array} + \dots$$

- Aufgrund der speziellen Form der Wechselwirkung im Hubbard-Modell haben einige Diagramme dieser Reihe den Wert 0. Welche sind dies? (Beachten Sie den Spin-Index im Wechselwirkungsterm!)
- Diskutieren Sie die Diagramme in (imaginärer) Zeitdarstellung für den Grenzfall $\mu \rightarrow -\infty$, d.h. $\langle n_{i\sigma} \rangle = 0$! Hier ist nur ein einziges Diagramm von Null verschieden. Welches?
- Sind die Diagramme Skelette? Falls ja, "renormieren" Sie die Diagramme, d.h. ersetzen Sie Einfach- durch Doppellinien!
- Berechnen Sie das Hartree- und das Fock-Diagramm für das Hubbard-Modell!
- Die letzten beiden gezeichneten Diagramme enthalten einen bzw. zwei "bubbles". Berechnen Sie einen "bubble" und dann sämtliche (von Null verschiedenen) Diagramme mit 1, 2, 3, 4, ... "bubbles"! Benutzen Sie die Frequenz-Darstellung!
- Summieren Sie diese Diagramme!