Übungen zur Quantentheorie der Vielteilchensysteme

Aufgabe 27 — Linear Response
Gegeben ist ein System von L nichtwechselwirkenden Spins mit $s = 1/2$ in einem äußeren homogenen Magnetfeld in z-Richtung der Stärke b:

$$H = b \sum_i S_{iz} = b S_z \ .$$

a) Berechnen Sie auf direkte Weise $Z, \langle S_{iz} \rangle, \langle S_z \rangle, \langle S_{iz} S_{jz} \rangle, \langle S_z^2 \rangle$!

b) Bestimmen Sie so den statischen Response $\dfrac{\partial \langle S_z \rangle}{\partial b}$!

c) Vergleichen Sie mit dem Ausdruck

$$\frac{\partial \langle S_z \rangle}{\partial b} = \beta \langle S_z \rangle^2 - \int_0^\beta d\tau \langle S_z(\tau) S_z(0) \rangle \quad !$$

d) Berechnen Sie die retardierte Kommutator-Green-Funktion: $\langle\langle S_z ; S_z \rangle\rangle_\omega^{(\mathrm{ret})}$ für $\omega = 0$ und damit die lineare Antwort des Systems bei einer schwachen zeitabhängigen Störung $f(t) S_z$! Interpretieren Sie das Resultat!

e) Überprüfen Sie die Relation

$$\frac{\partial \langle A \rangle}{\partial \lambda_B} = G_{AB}(i0^+) + \beta \langle A \rangle \langle B \rangle - \beta D_{AB}$$

für $A = B = S_z$!

Aufgabe 28 — Homogenität der Green-Funktion
Zeigen Sie, dass

$$G_{AB}^{(\mathrm{ret})}(t, t') = G_{AB}^{(\mathrm{ret})}(t - t') \ ,$$

für ein System mit nicht explizit zeitabhängigem Hamilton-Operator!

Aufgabe 29 — $1/\omega$-Entwicklung
Zeigen Sie, dass

$$\langle\langle c_\alpha ; c_\beta^\dagger \rangle\rangle_\omega = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{\omega} + \frac{t_{\alpha\beta} - \mu \delta_{\alpha\beta} + \sum_{\gamma\delta} (U_{\alpha\gamma\beta\delta} + \epsilon U_{\gamma\alpha\beta\delta}) \langle c_\gamma^\dagger c_\delta \rangle}{\omega^2} + \mathcal{O}(\omega^{-3})$$

für ein System von Bosonen ($\epsilon = +1$) oder Fermionen ($\epsilon = -1$) mit Hamilton-Operator

$$H = \sum_{\alpha\beta} t_{\alpha\beta} \, c_\alpha^\dagger c_\beta + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} U_{\alpha\beta\gamma\delta} \, c_\alpha^\dagger c_\beta^\dagger c_\delta c_\gamma \ !$$