Übungen zur Quantentheorie der Vielteilchensysteme

Aufgabe 21 — Singulärwertzerlegung
Gegeben sei eine $m \times n$-Matrix $\boldsymbol{A}$. Zeigen Sie, dass unitäre $m \times m$- und $n \times n$-Matrizen $\boldsymbol{U}$ bzw. $\boldsymbol{V}$ existieren mit

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{D}\boldsymbol{V}^{\dagger} \ ,$$

wobei $\boldsymbol{D}$ eine $m \times n$-Matrix ist mit $d_{ij} = 0$ für $i \neq j$!

Hinweise: Definieren Sie $\rho = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\dagger}$. Welche Matrixdimensionen hat ρ? Ist ρ hermitesch und positiv definit? Bestimmen Sie zunächst $\boldsymbol{U}$ durch Diagonalisierung von ρ und dann $\boldsymbol{V}$ so dass $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{D}\boldsymbol{V}^{\dagger}$! Nehmen Sie zunächst an, dass verschwindende Eigenwerte nicht vorkommen!

Aufgabe 22 — Wick-Theorem
Betrachten Sie ein System von Spin-$1/2$-Fermionen. Die Ein-Teilchen-ONB ist $\{|\alpha\rangle\} = \{|i\sigma\rangle\}$. Berechnen Sie für $i \neq j$ die freien Erwartungswerte

$$\langle n_{i\uparrow} n_{i\downarrow} \rangle^{(0)} \qquad \langle n_{i\uparrow} n_{j\uparrow} \rangle^{(0)} \qquad \langle n_{i\uparrow} n_{j\downarrow} \rangle^{(0)} \qquad \langle n_{i\sigma} n_{j\sigma'} n_{j\sigma''} \rangle^{(0)}$$

mit Hilfe des Wick-Theorems! Nehmen Sie dabei an, dass die Gesamtteilchenzahl und der Gesamtspin erhalten sind ($[\hat{N}, H_0]_- = 0$, $[S_z, H_0]_- = 0$)!

Aufgabe 23 — Vakuumfluktuationen
Geben Sie einen Operator (in zweiter Quantisierung) an, dessen Vakuumerwartungswert verschwindet ($\langle A \rangle_v = \langle 0 | A | 0 \rangle = 0$), der aber eine endliche Fluktuation

$$\langle (A - \langle A \rangle_v)^2 \rangle_v > 0$$

im Vakuumzustand aufweist!