Übungen zur Quantentheorie der Vielteilchensysteme

Aufgabe 19 — stoachstische und ergodische Matrizen
Gegeben ist eine reelle 2×2-Matrix:

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .$$

Welche Bedingungen müssen an a, b, c, d gestellt werden, damit $\boldsymbol{T}$ stochastisch ist?

Welche weiteren Bedingungen müssen an a, b, c, d gestellt werden, damit $\boldsymbol{T}$ ergodisch ist?

Ist das Perron-Frobenius-Theorem erfüllt?

Berechnen Sie (unter der Annahme. dass die Bedingungen erfüllt sind) $\boldsymbol{T}^{\infty}$!

Für den durch $\boldsymbol{T}$ beschriebenen Markov-Prozess: Welche Endkonfigurationen liegen mit welchen Wahrscheinlichkeiten vor, falls anfangs Konfiguration "1" mit Wahrscheinlichkeit p und Konfiguration "2" mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ vorliegt?

Was passiert, falls $\boldsymbol{T}$ nicht ergodisch ist?

Aufgabe 20 — Matrix-product operators
The MPO representation of an operator X is:

$$X = \sum_{m_1,\ldots,m_L} \sum_{m'_1,\ldots,m'_L} \boldsymbol{X}^{m'_1 m_1} \cdots \boldsymbol{X}^{m'_L m_L} |m'_1\rangle\langle m_1| \cdots |m'_L\rangle\langle m_L|$$

where m_q labels the local basis states of the local Hilbert space at site q. Assume the local Hilbert space to be two-dimensional,

$$|+1/2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |-1/2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

with $m_q = \pm 1/2$ for all q, and that the matrices in the MPO representation are given by

$$\boldsymbol{X}^{m'_q m_q} = \delta_{m'_q, m_q} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_q & 0 & 0 \\ 0 & -J m_q & 1 \end{pmatrix} .$$

Figure out which operator X is represented by this choice !

Note that at the left edge ($q = 1$) the matrix $\boldsymbol{X}^{m'_q m_q}$ is actually a row, and a column at the right edge ($q = L$), i.e. at $q = 1$ and $q = L$ the replacements

$$\boldsymbol{X}^{m'_1 m_1} \mapsto (0,0,1) \cdot \boldsymbol{X}^{m'_1 m_1} \qquad \text{and} \qquad \boldsymbol{X}^{m'_L m_L} \mapsto \boldsymbol{X}^{m'_L m_L} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

are made.