Übungen zur Quantenmechanik III: Vielteilchenphysik

Aufgabe 26 — Linear Response
Gegeben ist ein System von L nichtwechselwirkenden Spins mit $s = 1/2$ in einem äußeren homogenen Magnetfeld in z-Richtung der Stärke b:

$$H = b \sum_i S_{iz} = bS_z \ .$$

a) Berechnen Sie auf direkte Weise $Z, \langle S_{iz} \rangle, \langle S_z \rangle, \langle S_{iz} S_{jz} \rangle, \langle S_z^2 \rangle$!

b) Bestimmen Sie so den statischen Response $\dfrac{\partial \langle S_z \rangle}{\partial b}$!

c) Vergleichen Sie mit dem Ausdruck

$$\frac{\partial \langle S_z \rangle}{\partial b} = \beta \langle S_z \rangle^2 - \int_0^\beta d\tau \langle S_z(\tau) S_z(0) \rangle \quad !$$

d) Berechnen Sie die retardierte Kommutator-Green-Funktion: $\langle\langle S_z; S_z \rangle\rangle_\omega^{(\mathrm{ret})}$ für $\omega = 0$ und damit die lineare Antwort des Systems bei einer schwachen zeitabhängigen Störung $f(t) S_z$! Interpretieren Sie das Resultat!

e) Überprüfen Sie die Relation

$$\frac{\partial \langle A \rangle}{\partial \lambda_B} = G_{AB}(i0^+) + \beta \langle A \rangle \langle B \rangle - \beta D_{AB}$$

für $A = B = S_z$!

Aufgabe 27 — Spektraltheorem
Betrachten Sie ein freies, spinloses Teilchen in einer Dimension:

$$H = \frac{p^2}{2m} \ , \qquad [x, p]_- = i \ .$$

Der (gemischte) Zustand des Systems sei durch $\rho = \exp(-\beta H)/Z$ mit $Z =$ Sp $\exp(-\beta H)$ gegeben.

a) Zeigen Sie durch eine explizite Rechnung, dass

$$\langle H \rangle = \frac{1}{2} T$$

und begründen Sie das Ergebnis!

b) $\langle H\rangle$ soll jetzt aus der Kommutator-Green-Funktion $G^{(+)}(\omega) = \langle\langle p;p\rangle\rangle^{(+)}$ berechnet werden. Lösen Sie die Bewegungsgleichung für $G^{(+)}(\omega)$! (Das Ergebnis ist trivial).

c) Versuchen Sie, den Erwartungswert $\langle H\rangle = \langle p\cdot p\rangle/2m$ aus dem Spektraltheorem zu bestimmen. Beachten Sie dabei die Konstante D (s. Vorlesung)!

d) Begründen Sie die Beziehung

$$\lim_{\omega\to 0}\omega G^{(-)}(\omega) = 2D\ ,$$

und berechnen Sie so die Konstante D aus der Antikommutator-Green-Funktion $G^{(-)}(\omega) = \langle\langle p;p\rangle\rangle^{(-)}$! Gelingt die Bestimmung von $\langle H\rangle$?

e) Es sei nun ein infinitesimales, symmetriebrechendes Feld durch

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\eta^2 x^2 \qquad \text{mit } \eta\to 0$$

eingeführt. Stellen Sie die Bewegungsgleichung für die Kommutator-Green-Funktion $\langle\langle p;p\rangle\rangle^{(+)}$ auf und lösen Sie diese für $\eta\neq 0$! (Dazu ist auch $\langle\langle x;p\rangle\rangle^{(+)}$ zu bestimmen).

f) Bestimmen Sie die Konstante D!

g) Berechnen Sie $\langle H\rangle_\eta$ aus dem Spektraltheorem für $G^{(+)}(\omega)$ für $\eta\neq 0$!

h) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{\eta\to 0}\langle H\rangle_\eta = \frac{1}{2}T\ !$$