Übungen zur Quantenmechanik III: Vielteilchenphysik

Aufgabe 9 — Coulomb-Wechselwirkung im reziproken Raum

Gegeben ist der folgende Hamilton-Operator in zweiter Quantisierung:

$$H = \sum_{ij\sigma} t_{ij} c^\dagger_{i\sigma} c_{j\sigma} + \frac{1}{2} \sum_{ijkl} \sum_{\sigma\sigma'} U_{ijkl} c^\dagger_{i\sigma} c^\dagger_{j\sigma'} c_{l\sigma'} c_{k\sigma}$$

mit

$$t_{ij} = \langle i\sigma | H_1 | j\sigma \rangle \qquad U_{ijkl} = \langle i\sigma, j\sigma' | H_2 | k\sigma, l\sigma' \rangle$$

wobei i die Plätze eines Gitters bezeichnet.

Führen Sie die Fourier-Transformation in den reziproken Raum durch, und geben Sie den Hamilton-Operator in zweiter Quantisierung bezüglich der ONB $\{|\boldsymbol{k}\sigma\rangle\}$ an! Welche Vereinfachungen ergeben sich durch die Translationsinvarianz?

Leiten Sie die Form der Wechselwirkungsparameter im $\boldsymbol{k}$-Raum her für den Spezialfall

$$U_{ijkl} = \delta_{ij}\delta_{ik}\delta_{il} U \ ,$$

also für eine rein lokale Wechselwirkung!

Aufgabe 10 — Sommerfeld-Entwicklung

Nutzen Sie die Sommerfeld-Entwicklung

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega f(\omega - \mu) F(\omega) = \int_{-\infty}^{\mu} d\omega F(\omega) + \frac{\pi^2}{6} T^2 F'(\mu) + \mathcal{O}(T/\mu)^4$$

($f(E) = 1/(\exp(\beta E) + 1)$ Fermi-Funktion), um die Temperaturabhängigkeit des chemischen Potenzials

$$\mu = \epsilon_F - \frac{\pi^2}{6} T^2 \frac{\rho_0'(\epsilon_F)}{\rho_0(\epsilon_F)} + \cdots$$

und der inneren Energie

$$U = E_0 + \frac{\pi^2}{6} T^2 \rho_0(\epsilon_F) + \cdots$$

für ein Fermi-Gas mit freier Zustandsdichte $\rho_0(\omega)$ bei fester Teilchenzahl abzuleiten!

Aufgabe 11 — $T = 0$-Spektraldichte
a) Zeigen Sie, dass die Spektraldichte für $T = 0$ als

$$S_{AB}(\omega) = \langle 0|A\delta(\omega - (\mathcal{H} - \mathcal{E}_0))B|0\rangle \pm \langle 0|B\delta(\omega - (\mathcal{E}_0 - \mathcal{H}))A|0\rangle$$

geschrieben werden kann und interpretieren Sie diesen Ausdruck!

b) Berechnen Sie die Spektraldichte $S_{AB}(\omega)$ für den Fall, dass $[A, \mathcal{H}]_- = 0$!

Aufgabe 12 — Spektraldichte: Fermi-Gas
Berechnen Sie die frequenzabhängige Ein-Teilchen-Spektraldichte für ein Fermi-Gas!

Aufgabe 13 — Kommutator- und Antikommutator-Spektraldichte
Finden Sie eine Begründung dafür, dass es sinnvoll ist mit der Kommutator-Spektraldichte $S_{AB}(\omega)$ zu operieren, falls das betrachtete System bosonisch ist oder falls das System fermionisch ist und A und B jeweils aus einer geraden Anzahl von Erzeugern/Vernichtern bestehen, und mit der Antikommutator-Spektraldichte, falls das System fermionisch ist und A und B jeweils aus einer ungeraden Anzahl von Erzeugern/Vernichtern bestehen!