Übungen zur Quantenmechanik III: Vielteilchenphysik

Aufgabe 1 — Ununterscheidbarkeitsprinzip
Zeigen Sie, wie aus dem Prinzip der Ununterscheidbarkeit identischer Teilchen folgt, dass

- jede physikalische Observable unter Teilchenpermutationen invariant ist:
  $A = \mathcal{P}^\dagger A \mathcal{P}$ bzw. $[A, \mathcal{P}]_- = 0$
- und jeder physikalische Zustand symmetrisch oder antisymmetrisch unter Teilchenpermutationen ist: $\mathcal{P}|\Psi\rangle = (\pm 1)^p |\Psi\rangle$

$\mathcal{P}$ ist der Teilchenpermutationsoperator.

Aufgabe 2 — (Anti-)Symmetrisierungsoperator
Beweisen Sie die Eigenschaften

- $\mathcal{P} S_N^{(\epsilon)} = \epsilon^{\mathcal{P}} S_N^{(\epsilon)}$
- $(S_N^{(\epsilon)})^2 = S_N^{(\epsilon)}$ (Idempotenz)
- $(S_N^{(\epsilon)})^\dagger = S_N^{(\epsilon)}$ (Hermitizität)
- $S_N^{(+)} S_N^{(-)} = S_N^{(-)} S_N^{(+)} = 0$

des (Anti-)Symmetrisierungsoperators $S_N^{(\epsilon)} = \dfrac{1}{N!} \sum_{\mathcal{P}} \epsilon^{\mathcal{P}} \mathcal{P}$

($\epsilon = +1$ für Bosonen, $\epsilon = -1$ für Fermionen)!

Zeigen Sie, dass $S_N^{(0)} = \mathbf{1} - S_N^{(+)} - S_N^{(-)}$ ein zu $S_N^{(\epsilon)}$ orthogonaler Projektor ist!

Aufgabe 3 — Darstellung von Basiszuständen
Zeigen Sie:

$$|N; n_1, n_2, \cdots, n_\alpha, \cdots\rangle^{(\varepsilon)} = \left(\frac{(c_1^\dagger)^{n_1}}{\sqrt{n_1!}} \frac{(c_2^\dagger)^{n_2}}{\sqrt{n_2!}} \cdots \frac{(c_\alpha^\dagger)^{n_\alpha}}{\sqrt{n_\alpha!}} \cdots \right) |0\rangle \qquad !$$

Aufgabe 4 — Fundamentale (Anti-)Vertauschungsrelationen
Beweisen Sie die folgenden Antikommutatorrelationen für ein System von identischen Fermionen ($[A, B]_+ = AB + BA$):

$$[c_\alpha, c_\beta]_+ = 0 \qquad , \qquad [c_\alpha^\dagger, c_\beta^\dagger]_+ = 0 \qquad , \qquad [c_\alpha, c_\beta^\dagger]_+ = \delta_{\alpha\beta} \qquad !$$

Aufgabe 5 — Darstellung von Observablen
Gehen Sie analog zu der in der Vorlesung vorgestellten Argumentation für den Ein-Teilchen-Anteil einer Observablen vor, und leiten Sie so die folgende allgemeine Darstellung für den Zwei-Teilchen-Anteil her:

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1,\ldots,N}^{i\neq j} A_2^{(i,j)} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta\gamma\delta}\langle\phi_\alpha\phi_\beta|A_2|\phi_\gamma\phi_\delta\rangle\; c_\alpha^\dagger c_\beta^\dagger c_\delta c_\gamma \qquad !$$

Aufgabe 6 — Kommutatoren mit dem Besetzungszahloperator
Begründen Sie, dass die Kommutatorrelation

$$[c_\alpha, \widehat{n_\beta}]_- = \delta_{\alpha\beta} c_\alpha$$

sowohl für Bosonen als auch für Fermionen gilt!

Aufgabe 7 — Zeitabhängiger Vernichter
Beweisen Sie (durch Taylor-Entwicklung von $f(\lambda) = e^{\lambda A} B e^{-\lambda A}$ um $\lambda = 0$), dass

$$e^{\lambda A} B e^{-\lambda A} = e^{-\lambda L_A} B$$

für zwei beliebige lineare Operatoren A, B, für $\lambda \in \mathbb{C}$ und $L_A(X) = [X, A]_-$!

Nutzen Sie dieses Resultat, um die Zeitabhängigkeit des Vernichters $c_\alpha(t)$ im Heisenberg-Bild zu berechnen. Nehmen Sie dazu an, dass der Hamilton-Operator ein Ein-Teilchen-Operator ist:

$$H = \sum_{\alpha\beta} t_{\alpha\beta} c_\alpha^\dagger c_\beta \; .$$

Gibt es hier Unterschiede zwischen Fermionen und Bosonen?