

Übungen zur Quantenmechanik III: Vielteilchenphysik

Aufgabe 22 — Homogenität der Green-Funktion

Zeigen Sie, dass

$$G_{AB}^{\text{ret}}(t, t') = G_{AB}^{\text{ret}}(t - t') ,$$

für ein System mit nicht explizit zeitabhängigem Hamilton-Operator!

Aufgabe 23 — Zwei-Teilchen-Green-Funktion

Berechnen Sie für ein System nicht-wechselwirkender spinloser Fermionen auf einem Gitter,

$$H_0 = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \epsilon(\mathbf{k}) c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}\sigma} ,$$

mithilfe der Zwei-Teilchen-Green-Funktion (Kommutator-Green-Funktion!)

$$G_{iiii}(\omega) = \langle\langle c_{i\sigma} c_{i-\sigma}; c_{i-\sigma}^\dagger c_{i\sigma}^\dagger \rangle\rangle_\omega$$

die zugehörige Spektraldichte $A_{iiii}(\omega)$! Drücken Sie die Spektraldichte als Funktional der Ein-Teilchen-Spektraldichte $A_{ii}(\omega) = -(1/\pi)\text{Im}\langle\langle c_{i\sigma}; c_{i\sigma}^\dagger \rangle\rangle_\omega^{(\text{ret})}$ aus!

Aufgabe 24 — Spektraltheorem

Betrachten Sie ein freies, spinloses Teilchen in einer Dimension:

$$H = \frac{p^2}{2m} , \quad [x, p]_- = i .$$

Der (gemischte) Zustand des Systems sei durch $\rho = \exp(-\beta H)/Z$ mit $Z = \text{Sp} \exp(-\beta H)$ gegeben.

a) Zeigen Sie durch eine explizite Rechnung, dass

$$\langle H \rangle = \frac{1}{2} T$$

und begründen Sie das Ergebnis!

b) $\langle H \rangle$ soll jetzt aus der Kommutator-Green-Funktion $G^{(+)}(\omega) = \langle\langle p; p \rangle\rangle^{(+)}$ berechnet werden. Lösen Sie die Bewegungsgleichung für $G^{(+)}(\omega)$! (Das Ergebnis ist trivial).

c) Versuchen Sie, den Erwartungswert $\langle H \rangle = \langle p \cdot p \rangle / 2m$ aus dem Spektraltheorem zu bestimmen. Beachten Sie dabei die Konstante D (s. Vorlesung)!

d) Begründen Sie die Beziehung

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \omega G^{(-)}(\omega) = 2D,$$

und berechnen Sie so die Konstante D aus der Antikommutator-Green-Funktion $G^{(-)}(\omega) = \langle \langle p; p \rangle \rangle^{(-)}$! Gelingt die Bestimmung von $\langle H \rangle$?

e) Es sei nun ein infinitesimales, symmetriebrechendes Feld durch

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2} \eta^2 x^2 \quad \text{mit } \eta \rightarrow 0$$

eingeführt. Stellen Sie die Bewegungsgleichung für die Kommutator-Green-Funktion $\langle \langle p; p \rangle \rangle^{(+)}$ auf und lösen Sie diese für $\eta \neq 0$! (Dazu ist auch $\langle \langle x; p \rangle \rangle^{(+)}$ zu bestimmen).

f) Bestimmen Sie die Konstante D !

g) Berechnen Sie $\langle H \rangle_\eta$ aus dem Spektraltheorem für $G^{(+)}(\omega)$ für $\eta \neq 0$!

h) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \langle H \rangle_\eta = \frac{1}{2} T !$$

Aufgabe 25 — $1/\omega$ -Entwicklung

Zeigen Sie, dass

$$\langle \langle c_\alpha; c_\beta^\dagger \rangle \rangle_\omega = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{\omega} + \frac{t_{\alpha\beta} - \mu\delta_{\alpha\beta} + \sum_{\gamma\delta} (U_{\alpha\gamma\beta\delta} + \epsilon U_{\gamma\alpha\beta\delta}) \langle c_\gamma^\dagger c_\delta \rangle}{\omega^2} + \mathcal{O}(\omega^{-3})$$

für ein System von Bosonen ($\epsilon = +1$) oder Fermionen ($\epsilon = -1$) mit Hamilton-Operator

$$H = \sum_{\alpha\beta} t_{\alpha\beta} c_\alpha^\dagger c_\beta + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} U_{\alpha\beta\gamma\delta} c_\alpha^\dagger c_\beta^\dagger c_\delta c_\gamma !$$