

Übungen zur Quantenmechanik II

Aufgabe 27 — Transpositions- und Permutationsoperator

a) Zeigen Sie, dass der Transpositionsoperator P_{ij} hermitesch ist!

b) H_t sei der (möglicherweise explizit zeitabhängige) Hamilton-Operator eines Systems von N identischen Teilchen. Zeigen Sie, dass der Zeitentwicklungsoperator $U(t, t_0)$ mit sämtlichen Permutationsoperatoren \mathcal{P} vertauschen muss!

Aufgabe 28 — Hilbert-Raum eine N -Teilchensystems

\mathcal{H}_1 sei der endlichdimensionale Hilbert-Raum eines Teilchens und $d = \dim \mathcal{H}_1$ die Dimension. $|\phi_1\rangle, \dots, |\phi_d\rangle$ seien die Zustände einer Orthonormalbasis von \mathcal{H}_1 .

a) Begründen Sie, dass die Dimension des N -Teilchen-Hilbert-Raums \mathcal{H}_N durch $D = \dim \mathcal{H}_N = d^N$ gegeben ist!

b) Listen Sie für $d = 3$ und $N = 2$ sämtliche Basiszustände von \mathcal{H}_N auf!

c) Wenden Sie auf jeden dieser Zustände den (Anti-)Symmetrisierungsoperator $S_N^{(\pm)}$ an, und konstruieren Sie auf diese Weise eine Basis von $\mathcal{H}_N^{(\pm)}$! Welche Dimension hat $\mathcal{H}_N^{(\pm)}$ für $d = 3$ und $N = 2$?

d) Welche Dimension haben \mathcal{H}_N , $\mathcal{H}_N^{(-)}$ und $\mathcal{H}_N^{(+)}$ für $d = 3$ und $N = 3$?

e) Geben Sie die Basiszustände von $\mathcal{H}_N^{(\pm)}$ für $d = 3$ und $N = 2$ bzw. $N = 3$ in Besetzungszahldarstellung an!

f) Welche Dimension haben \mathcal{H}_N , $\mathcal{H}_N^{(-)}$ und $\mathcal{H}_N^{(+)}$ für beliebiges d und N ?

g) Diskutieren Sie den Spezialfall $N = 1$!

Aufgabe 29 — N identische Teilchen im harmonischen Potenzial

N identische Teilchen mit Spin S befinden sich in einem eindimensionalen harmonischen Potenzial $V(x) = (1/2)m\omega^2 x^2$. Das N -Teilchen-System sei wechselwirkungsfrei.

- a) Geben Sie den Hamilton-Operator des i -ten Teilchens an! Wie lautet die Lösung des Ein-Teilchen-Problems?
- b) Geben Sie den Hamilton-Operator H_N den N -Teilchen-Systems an!
- c) Konstruieren Sie die Eigenzustände von H_N für den Fall $S = 0$ und den Fall $S = 1/2$!
- d) Wie groß ist jeweils die Grundzustandsenergie und die erste Anregungsenergie? (Nehmen Sie vereinfachend an, dass N ein Vielfaches von 4 ist!)
- e) Wie lauten Grundzustand und erster angeregter Zustand jeweils in der Besetzungszahldarstellung?