Übungen zur Quantenmechanik II

Aufgabe 14 — Aharonov-Bohm-Effekt

Gegeben sei der Hamilton-Operator für ein Teilchen (Masse m, Ladung q) in einem zeitunabhängigen durch die Potenziale $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$ und $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$ bestimmten elektromagnetischen Feld:

$$H = \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\nabla - \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r})\right)^2 + q\varphi(\mathbf{r})$$

a) $\Psi_0(\mathbf{r}, t)$ sei eine Lösung der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung für $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0$. Zeigen Sie, dass dann

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi_0(\mathbf{r}, t)\,\exp\left(\frac{iq}{\hbar c}\int_0^{\mathbf{r}} d\mathbf{r}'\mathbf{A}(\mathbf{r}')\right)$$

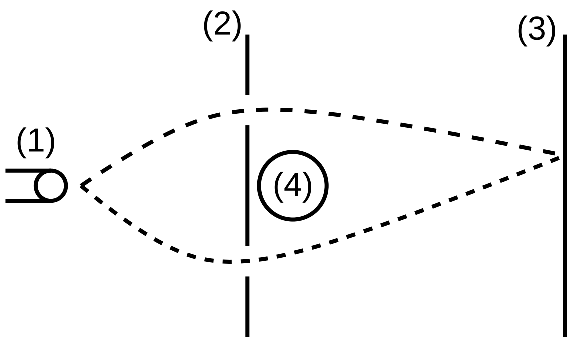
eine Lösung der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung für $\mathbf{A}(\mathbf{r}) \neq 0$, aber $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0$ ist! (Die Integration läuft über einen beliebigen Weg von 0 nach $\mathbf{r}$).

b) Betrachten Sie jetzt eine Eichtransformation der Form

$$\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda$$

mit $\Lambda = \Lambda(\mathbf{r})$. Das elektromagnetische Feld, $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ bleibt unverändert. Wie transformiert sich $\Psi(\mathbf{r}, t)$ für $\mathbf{A}(\mathbf{r}) \neq 0$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$?

c) Diskutieren Sie qualitativ das folgende Beugungsexperiment:



(1) Elektonenquelle, (2) Doppelspalt, (3) Schirm (Detektor), (4) Querschnitt einer unendlich langen Spule, innerhalb: $\mathbf{B} \neq 0$, außerhalb: $\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{A} \neq 0$; die Elektronen können nicht in die Spule eindringen.

Kann eine spezielle Eichung einen Einfluss auf das am Schirm erscheinende Interferenzmuster haben?

d) Im Bahnintegral-Formalismus ist die Übergangswahrscheinlichkeitsamplitude durch

$$\int_{\mathbf{r}(0)=\mathbf{r}_{Quelle}}^{\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}_{Schirm}} D\mathbf{r}(\cdot) \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[\mathbf{r}(\cdot)]\right)$$

gegeben. Diskutieren Sie den durch $\mathbf{A} \neq 0$ auftretenden Term im klassischen Wirkungsfunktional! Ist der damit verbundene Phasenfaktor abhängig von der jeweiligen Bahn?

Aufgabe 15 — Antilineare Operatoren
Lineare hermitesche Operatoren haben reelle Eigenwerte, und lineare unitäre Operatoren haben Eigenwerte vom Betrag eins.

Rekapitulieren Sie die entsprechenden Beweise, und überprüfen Sie, ob die Aussagen für antilinear hermitesche bzw. für antilinear unitäre Operatoren gültig bleiben! Konstruieren Sie gegebenenfalls ein Gegenbeispiel!

Aufgabe 16 — Eindeutigkeit von T
Zum Beweis der Eindeutigkeit des zu einer Symmetrietransformation $\mathcal{T}$ gehörigen (anti-)unitären Operators T wird das folgende Lemma benötigt (s. Vorlesung):

Sei X ein (linearer) Operator mit $[X, A] = 0$ für beliebige lineare hermitesche Operatoren A, dann ist $X = c \cdot \mathbf{1}$ mit einer komplexen Zahl c.

Beweisen Sie dieses Lemma!

Aufgabe 17 — Strukturkonstanten
a) Zeigen Sie, dass die Operatoren p_x, x und $\mathbf{1}$ eine Lie-Algebra bilden (Heisenberg-Algebra) und bestimmen Sie die Strukturkonstanten!

b) Beweisen Sie die Jacobi-Identität

$$[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0$$

für beliebige Operatoren A, B, C, und leiten Sie daraus die Relation

$$C_{ij}^{l} C_{lk}^{m} + C_{jk}^{l} C_{li}^{m} + C_{ki}^{l} C_{lj}^{m}$$

für die Strukturkonstanten einer Lie-Algebra ab!