Übungen zur Theoretischen Physik A

Aufgabe 31 — Kugelflächenfunktionen

a) Benutzen Sie die allgemeine Formel für die Kugelflächenfunktionen um zu zeigen, dass

$$Y_{lm}(\vartheta,\varphi)^* = Y_{l-m}(\vartheta,\varphi)\ !$$

b) Wie groß ist der Erwartungswert von $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ und von $\hat{L}_z$ im Zustand $Y_{4,-2}(\vartheta,\varphi)$?

c) Berechnen Sie die Normierungskonstante A für den Zustand

$$\Psi(\vartheta,\varphi) = A\Big[Y_{1,1}(\vartheta,\varphi) + Y_{1,-1}(\vartheta,\varphi)\Big] \quad !$$

d) Berechnen Sie die Unschärfe von $\hat{L}_z$ im Zustand $\Psi(\vartheta,\varphi)$!

Aufgabe 32 — Spin-1

a) Zeigen Sie, dass durch

$$\hat{S}_x = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad \hat{S}_y = \hbar\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \ , \quad \hat{S}_z = \hbar\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ein Spin 1 definiert ist, dass also $\hat{\boldsymbol{S}} = (\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z)$ ein Drehimpuls mit Drehimpulsquantenzahl $S = 1$ ist!

b) Wie muss $\hat{S}_x$ definiert werden, damit $\hat{\boldsymbol{S}} = (\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z)$ mit

$$\hat{S}_y = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad \hat{S}_z = \hbar\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ein Spin 1 ist?

c) Welche Eigenwerte hat $\hat{S}_x$ in Teil a) und in Teil b)?

Aufgabe 33 — Spur

Die "Spur" Sp(A) einer Matrix A ist die Summe ihrer Diagonalelemente.

a) Berechnen Sie die Spur von $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$, $\hat{S}_z$ für einen Spin 1!

b) Berechnen Sie die Spur von $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$, $\hat{S}_z$ für einen Spin 1/2!

c) Beweisen Sie, dass

$$\mathrm{Sp}(AB) = \mathrm{Sp}(BA)$$

für das Produkt zweier beliebiger Matrizen A und B!

d) Betrachten Sie die allgemeinen Kommutatorrelationen für einen Drehimpuls $\hat{\boldsymbol{J}} = (\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z)$ und zeigen Sie, dass die Spur für alle Komponenten verschwinden muss!