Übungen zur Theoretischen Physik A

Aufgabe 25 — Rechenregeln für den Kommutator
$\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ seien beliebige Operatoren und α, β beliebige komplexe Zahlen. Zeigen Sie die Gültigkeit folgender Rechenregeln für den Kommutator:

a) Antisymmetrie

$$[\hat{A}, \hat{B}] = -[\hat{B}, \hat{A}]$$

b) Bilinearität

$$[\alpha\hat{A} + \beta\hat{B}, \hat{C}] = \alpha[\hat{A}, \hat{C}] + \beta[\hat{B}, \hat{C}]$$

c) Produktregel

$$[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}$$

d) Jacobi-Identiät

$$[\hat{A}, [\hat{B}, \hat{C}]] + [\hat{B}, [\hat{C}, \hat{A}]] + [\hat{C}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0 \ !$$

Aufgabe 26 — Erhaltungsgrößen
Ein Quantensystem werde durch den Hamilton-Operator $\hat{H}$ beschrieben. Man sagt, dass eine Observable A eine Erhaltungsgröße ist, falls

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{A}\rangle = 0 \ .$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Schrödinger-Gleichung, dass A genau dann erhalten ist, wenn $[\hat{A}, \hat{H}] = 0$!

Aufgabe 27 — Parität
Der Paritätsoperator $\hat{P}$ ist folgendermaßen definiert:

$$\hat{P}\Psi(x) = \Psi(-x)$$

für beliebige Wellenfunktionen $\Psi(x)$.

a) Zeigen Sie, dass $\hat{P}$ hermetisch ist!

b) Zeigen Sie, dass ± 1 die beiden einzigen möglichen Eigenwerte von $\hat{P}$ sind!

c) Ein Teilchen bewege sich unter dem Einfluss eines Potenzials $V(x)$, das symmetrisch zum Ursprung ist: $V(-x) = V(x)$. Zeigen Sie, dass der Paritätsoperator dann mit dem Hamilton-Operator vertauscht!

d) Wegen $[\hat{P}, \hat{H}] = 0$ können die Eigenzustände von $\hat{H}$ gleichzeitig als Eigenzustände von $\hat{P}$ gewählt werden. Diskutieren Sie diesen Sachverhalt qualitativ für die folgenden Systeme:

1) Teilchen im unendlich hohen Potenzialtopf
2) Eindimensionaler harmonischer Oszillator