Übungen zur Theoretischen Physik A

Aufgabe 22 — Kommutatoren

Es sei

$$\hat{H} = \frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2m} + V(\hat{\boldsymbol{r}})$$

der Hamilton-Operator eines (dreidimensionalen) Quantensystems mit Potenzial $V(\hat{\boldsymbol{r}}) = V(\boldsymbol{r}) = V(x, y, z)$.

Berechnen Sie die folgenden Kommutatoren!

a)

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] , \qquad [\hat{x}, \hat{p}_y] , \qquad [\hat{x}, \hat{p}_z] , \qquad [\hat{x}, \hat{\boldsymbol{p}}] .$$

b)

$$[\hat{p}_x, \hat{\boldsymbol{r}}] , \qquad [\hat{p}_x, \hat{p}_y] .$$

c)

$$[\hat{p}_x, V(\hat{\boldsymbol{r}})] , \qquad [\hat{\boldsymbol{p}}, V(\hat{\boldsymbol{r}})] , \qquad [\hat{p}_x, \hat{\boldsymbol{p}}^2] .$$

d)

$$[\hat{\boldsymbol{p}}, \hat{H}] , \qquad [\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{H}] .$$

Aufgabe 23 — Konstruktion des Quantenzustands aus Messergebnissen

Konstruieren Sie einen Quantenzustand

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

derart, dass die Messung von $\hat{S}_y$ mit einer Wahrscheinlichkeit von 64% den Messwert $+\hbar/2$ und mit einer Wahrscheinlichkeit von 36% den Messwert $-\hbar/2$ ergibt! Sind a und b dadurch eindeutig bestimmt?

Aufgabe 24 — Unitäre Operatoren

Ein Operator $\hat{U}$ heißt unitär, falls

$$\hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{U}^\dagger\hat{U} = \hat{1} .$$

Zeigen Sie, dass die Eigenwerte von $\hat{U}$ komplexe Zahlen vom Betrag 1 sein müssen!

Eine unitäre Transformation ist eine Transformation von Zuständen und von Operatoren (Messgrößen) der Form

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle \mapsto |\Psi'\rangle &= \hat{U}|\Psi\rangle \\ \langle\Psi| \mapsto \langle\Psi'| &= \langle\Psi|\hat{U}^\dagger \\ \hat{A} \mapsto \hat{A}' &= \hat{U}\hat{A}\hat{U}^\dagger \,. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass sich der Erwartungswert von Operatoren bei einer unitären Transformation nicht ändert!

Zeigen Sie, dass sich die Eigenwerte von Operatoren nicht ändern!