Übungen zur Theoretischen Physik A

Aufgabe 16 — Periodische Randbedingungen
Betrachten Sie ein Teilchen, das sich entlang eines eindimensionalen geschlossenen Rings der Länge L bewegen kann. Die Wellenfunktion des Teilchens ist $\Psi(x,t)$, und wegen der Ringgeometrie ist die "periodische Randbedingung"

$$\Psi(x+L,t) = \Psi(x,t)$$

für alle x zu erfüllen!

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Schrödinger-Gleichung für den Fall, dass $V(x) = 0$!
Welche Wellenvektoren sind möglich?
Welche Energien sind möglich?
Kann die Wellenfunktion auf eins normiert werden?

Wie ändern sich die Ergebnisse für ein Teilchen in drei Raumdimensionen, dass in einen Würfel der Kantenlänge L so eingeschlossen ist, dass wiederum periodische Randbedingungen

$$\begin{aligned} \Psi(x+L,y,z,t) &= \Psi(x,y,z,t)\ , \\ \Psi(x,y+L,z,t) &= \Psi(x,y,z,t)\ , \\ \Psi(x,y,z+L,t) &= \Psi(x,y,z,t) \end{aligned}$$

anzusetzen sind?

Aufgabe 17 — Quantenmechanik mit 2×2-Matrizen - hermitesche Operatoren
Gegeben ist die folgende 2×2-Matrix (Operator)

$$\hat{A} = A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

mit festen komplexen Werten a,b,c,d. Desweiteren gegeben sind zwei Vektoren (Zustände)

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad |\Phi\rangle = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

mit festen komplexen Werten x,y,u,v.

a) Berechnen Sie $|\Psi'\rangle = \hat{A}|\Psi\rangle$, d.h.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\ ,$$

und $\langle\Phi|\hat{A}|\Psi\rangle$, d.h.

$$(u^*, v^*) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\ !$$

Berechnen Sie weiter $|\Phi'\rangle = \hat{A}|\Phi\rangle$, d.h.

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} ,$$

und $\langle \hat{A}\Phi|\Psi\rangle$, d.h.

$$(u'^*, v'^*) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} !$$

b) Für eine hermetische Matrix müssen beide Resultate gleich sein (unabhängig von der Wahl von x, y, u, v), d.h. es muss gelten $\langle\Phi|\hat{A}|\Psi\rangle = \langle\hat{A}\Phi|\Psi\rangle$ (für alle $|\Psi\rangle$ und $|\Phi\rangle$). Wie müssen also die Matrixelemente a, b, c, d aussehen, damit A hermetisch ist?

Aufgabe 18 — Quantenmechanik mit 2×2-Matrizen - Messung
a) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} .$$

Ist A hermitesch?
Bestimmen Sie die Eigenwerte von A!
Fassen Sie A als eine Observable auf. Welche physikalische Bedeutung haben dann die Eigenwerte?
Sind die Eigenwerte reell? Müssen die Eigenwerte reell sein?

b) Bestimmen Sie Eigenvektoren zu den beiden Eigenwerten!
Normieren Sie die Eigenvektoren auf 1!
Welche physikalische Bedeutung haben die Eigenvektoren?
Bilden die Eigenvektoren eine Basis?
Sind sie zueinander orthogonal?

c) Das physikalische System befinde sich zur Zeit $t = 0$ im Zustand

$$|\Psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Es werde die Observable A gemessen.
Welche Messwerte sind möglich?
Mit welchen Wahrscheinlichkeiten treten sie auf?
Wie groß ist der Erwartungswert bei der A-Messung?

d) Nehmen Sie an, die Messung von A liefere den Wert $a = 2$.
In welchen Zustand befindet sich das System dann unmittelbar nach der Messung?
Es werde jetzt A nochmal gemessen (sofort nach der ersten Messung).
Welche Messwerte sind jetzt möglich?
Mit welchen Wahrscheinlichkeiten treten sie auf?