Übungen zur Vielteilchentheorie

Aufgabe 30 — Innere Energie

Zeigen Sie, dass die innere Energie $U = \langle H \rangle$ eines Systems von identischen Fermionen,

$$H = \sum_{\alpha\beta} t_{\alpha\beta}\, c_\alpha^\dagger c_\beta + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} U_{\alpha\beta\gamma\delta}\, c_\alpha^\dagger c_\beta^\dagger c_\delta c_\gamma \ ,$$

mithilfe der Ein-Teilchen-Spektraldichte $A_{\alpha\beta}(\omega) = (-1/\pi)\mathrm{Im} G_{\alpha\beta}(\omega + i0^+)$ durch

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \int d\omega\, f(\omega)[(\omega + \mu)\delta_{\alpha\beta} + t_{\alpha\beta}] A_{\beta\alpha}(\omega)$$

ausgedrückt werden kann! Nutzen Sie dazu die Bewegungsgleichung für $G_{\alpha\beta}(\omega)$, das Spektraltheorem und die Symmetrie $U_{\alpha\beta\gamma\delta} = U_{\beta\alpha\delta\gamma}$ aus! $f(\omega) = 1/(e^{\omega/T} + 1)$ ist die Fermi-Funktion. Was ändert sich im Falle von Bosonen?

Aufgabe 31 — Bogoliubov-Transformation

Für ein System von Fermionen ist der Hamilton-Operator

$$H = \omega_1 c_1^\dagger c_1 - \omega_2 c_2 c_2^\dagger + \rho(c_1^\dagger c_2^\dagger + c_2 c_1) = (c_1^\dagger, c_2) \begin{pmatrix} \omega_1 & \rho \\ \rho & -\omega_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2^\dagger \end{pmatrix}$$

gegeben. Führen Sie neue fermionische Erzeuger und Vernichter ein, und bringen Sie H mit dem Ansatz

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2^\dagger \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2^\dagger \end{pmatrix}$$

(S: 2×2-Matrix) auf die Form:

$$H = \eta_1 d_1^\dagger d_1 + \eta_2 d_2 d_2^\dagger \ !$$

Bestimmen Sie η_1, η_2! Gelingt diese Idee auch für Bosonen?