Übungen zur Vielteilchentheorie

Aufgabe 24 — Auswertung der Spur mit kohärenten Zuständen
Gegeben ist ein System von Bosonen. A sei ein beliebiger Operator und $|\varphi_1, ..., \varphi_d\rangle$ ein kohärenter Zustand, $\varphi_\alpha \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie ($\varphi_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha$):

$$\text{Sp}\, A = \int \left(\prod_{\alpha=1}^{d} \frac{dx_\alpha dy_\alpha}{\pi} \right) e^{-\sum_\alpha \varphi_\alpha^* \varphi_\alpha} \langle \varphi_1, ..., \varphi_d | A | \varphi_1, ..., \varphi_d \rangle \quad !$$

Aufgabe 25 — Jordan-Wigner-Transformation
Betrachten Sie das Heisenberg-Modell in einer Dimension

$$H = -J \sum_i \boldsymbol{S}_i \boldsymbol{S}_{i+1}$$

mit lokalen Spins $\boldsymbol{S}_i$ auf den Plätzen $i = 1, ..., L$ einer Kette der Länge L und Austausch-Kopplung J zwischen nächsten Nachbarn. $\boldsymbol{S}_i$ sei jeweils ein Spin-1/2 (d.h. $\boldsymbol{S}_i^2 = S(S+1) = 3/4$). Die Komponenten von Spins an verschiedenen Gitterplätzen $i \neq j$ kommutieren, für $i = j$ hat man die gewöhnliche Drehimpuls-Algebra:

$$[S_{ix}, S_{iy}]_- = iS_{iz} \qquad \text{etc.}$$

Mit der Jordan-Wigner-Transformation kann das Spin-1/2-System auf ein System von Fermionen abgebildet werden. Man definiert zunächst Erzeuger und Vernichter

$$a_i^\dagger = S_{ix} + iS_{iy} \;, \qquad a_i = S_{ix} - iS_{iy} \;.$$

a) Zeigen Sie, dass $[a_i, a_j]_- = 0$, $[a_i, a_j^\dagger]_- = 0$ für $i \neq j$ (wie Bosonen) und dass $[a_i, a_i]_+ = 0$, $[a_i, a_i^\dagger]_+ = 1$ (wie Fermionen)!

b) Geben Sie die Umkehrtransformation an! Wie muss S_{iz} durch a_i und $a_i^\dagger$ dargestellt werden?

c) Definieren Sie jetzt Erzeuger und Vernichter

$$c_i^\dagger = e^{-i\pi \sum_{j=1}^{i-1} a_j^\dagger a_j} \; a_i^\dagger$$
$$c_i = e^{i\pi \sum_{j=1}^{i-1} a_j^\dagger a_j} \; a_i \;,$$

und zeigen Sie, dass $[c_i, c_j^\dagger]_+ = \delta_{ij}$ (also Fermionen)!

d) Zeigen Sie weiter:

$$
\begin{aligned}
[e^{\pm i\pi \sum_{j=1}^{i-1} a_j^\dagger a_j}, a_i]_- &= 0 \\
a_i^\dagger a_i &= c_i^\dagger c_i (= n_i) \\
e^{\pm i\pi n_i} c_i &= c_i \\
c_i^\dagger e^{\pm i\pi n_i} &= c_i^\dagger \\
[c_i, e^{\pm i\pi n_i}]_+ &= 0 \\
[c_i^\dagger, e^{\pm i\pi n_i}]_+ &= 0
\end{aligned}
$$

e) Auf welches Modell wird das Heisenberg-Modell durch die Jordan-Wigner-Transformation $\boldsymbol{S}_i \mapsto c_i, c_i^\dagger$ abgebildet?

f) Warum funktioniert die Abbildung nur in einer Raumdimension?