Übungen zur Vielteilchentheorie

Aufgabe 20 — Coulomb-Wechselwirkung im reziproken Raum

Gegeben ist der folgende Hamilton-Operator in zweiter Quantisierung:

$$H = \sum_{ij\sigma} t_{ij} c^\dagger_{i\sigma} c_{j\sigma} + \frac{1}{2} \sum_{ijkl} \sum_{\sigma\sigma'} U_{ijkl} c^\dagger_{i\sigma} c^\dagger_{j\sigma'} c_{l\sigma'} c_{k\sigma}$$

mit

$$t_{ij} = \langle i\sigma | H_1 | j\sigma \rangle \qquad U_{ijkl} = \langle i\sigma, j\sigma' | H_2 | k\sigma, l\sigma' \rangle$$

wobei i die Plätze eines Gitters bezeichnet.

Führen Sie die Fourier-Transformation in den reziproken Raum durch, und geben Sie den Hamilton-Operator in zweiter Quantisierung bezüglich der ONB $\{|\boldsymbol{k}\sigma\rangle\}$ an! Welche Vereinfachungen ergeben sich durch die Translationsinvarianz?

Leiten Sie die Form der Wechselwirkungsparameter im $\boldsymbol{k}$-Raum her für den Spezialfall

$$U_{ijkl} = \delta_{ij}\delta_{ik}\delta_{il} U \ ,$$

also für eine rein lokale Wechselwirkung!

Aufgabe 21 — Atomarer Limes

Gegeben ist das Hubbard-Modell im atomaren Limes,

$$H = \epsilon_0 \sum_{i\sigma} \hat{n}_{i\sigma} + \frac{U}{2} \sum_{i\sigma} \hat{n}_{i\sigma} \hat{n}_{i-\sigma} \ .$$

Berechnen Sie die großkanonische Zustandssumme und das großkanonische Potenzial!

Welche Werte nimmt die Entropie (abhängig von den Modellparametern) in den Grenzfällen $T \to \infty$ und $T \to 0$ an?

Aufgabe 22 — $SU(2)$-Invarianz

Betrachten Sie die SU(2)-Gruppe der Spinrotationen, die durch den unitären Operator

$$U(\boldsymbol{a}) = \exp(i\boldsymbol{a}\boldsymbol{S})$$

beschrieben wird ($\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z), \boldsymbol{S}$ Gesamtspin).

a) Berechnen Sie $[c_{i\sigma}, \boldsymbol{S}]_-$!

b) Zeigen Sie, dass man das Resultat kompakt als Gleichung für zweikomponentige "Spinoren" schreiben kann:

$$[\begin{pmatrix} c_{i\uparrow} \\ c_{i\downarrow} \end{pmatrix}, S_{i\mu}]_- = \frac{1}{2}\sigma^{(\mu)} \begin{pmatrix} c_{i\uparrow} \\ c_{i\downarrow} \end{pmatrix} \qquad !$$

$\sigma^{(\mu)}$ $(\mu = x, y, z)$ sind die Pauli-Matrizen.

c) Wie transformiert sich der Vernichter $\begin{pmatrix} c_{i\uparrow} \\ c_{i\downarrow} \end{pmatrix}$ unter der SU(2)-Transformation?

d) Zeigen Sie, dass der Hubbard-Hamilton-Operator SU(2)-invariant ist, indem Sie ihn so umformen, dass die Invarianz offensichtlich wird!

Aufgabe 23 — Kohärente Zustände – 2

Für beliebige $\varphi_1, ..., \varphi_d \in \mathbb{C}$ sei durch

$$|\varphi_1, ..., \varphi_d\rangle = \exp\left(\sum_{\alpha=1}^{d} \varphi_\alpha c_\alpha^\dagger\right)|0\rangle$$

ein Zustand definiert. d ist die Dimension des Ein-Teilchen-Hilbert-Raums, $|0\rangle$ ist der Vakuumzustand. Betrachtet werde ein bosonisches System.

a) Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} c_\alpha|\varphi_1, ..., \varphi_d\rangle &= \varphi_\alpha|\varphi_1, ..., \varphi_d\rangle \\ \langle\varphi_1, ..., \varphi_d|c_\alpha^\dagger &= \langle\varphi_1, ..., \varphi_d|\varphi_\alpha^* \\ c_\alpha^\dagger|\varphi_1, ..., \varphi_d\rangle &= \frac{\partial}{\partial\varphi_\alpha}|\varphi_1, ..., \varphi_d\rangle \\ \langle\varphi_1, ..., \varphi_d|c_\alpha &= \frac{\partial}{\partial\varphi_\alpha^*}\langle\varphi_1, ..., \varphi_d| \end{aligned}$$

b) Berechnen Sie:

$$\langle\varphi_1, ..., \varphi_d|\varphi_1', ..., \varphi_d'\rangle$$

c) Beweisen Sie:

$$\int\left(\prod_{\alpha=1}^{d}\frac{dx_\alpha dy_\alpha}{\pi}\right)e^{-\sum_\alpha \varphi_\alpha^*\varphi_\alpha}|\varphi_1, ..., \varphi_d\rangle\langle\varphi_1, ..., \varphi_d| = \mathbf{1}$$

wobei $\varphi_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha$ mit $x_\alpha, y_\alpha \in \mathbb{R}$, und die Integrale jeweils von $-\infty$ bis ∞ laufen!