# Übungen zur Quantentheorie der Vielteilchensysteme

## Aufgabe 14 — Zerlegung der Eins

Nutzen Sie die Relation

$$|\varphi_1 \cdots \varphi_K\rangle = \sum_{n_1 \cdots n_K} \left( \prod_{\alpha=1}^{K} \frac{\varphi_\alpha^{n_\alpha}}{\sqrt{n_\alpha!}} \right) |n_1 \cdots n_K\rangle \,,$$

und zeigen Sie damit durch direktes Ausführen der Integration unter Benutzung von Polarkoordinaten ($\varphi = re^{i\vartheta}$), dass

$$1 = \int \left( \prod_\alpha \frac{d\varphi_\alpha^* d\varphi_\alpha}{2\pi i} \right) e^{-\sum_\alpha \varphi_\alpha^* \varphi_\alpha} |\varphi_1 \cdots \varphi_K\rangle\langle\varphi_1 \cdots \varphi_K| \quad !$$

## Aufgabe 15 — $\delta$-Funktion, Bosonen

Zeigen Sie, dass im Raum der Wellenfunktionen

$$\Psi(\varphi_1^*, ..., \varphi_K^*) = \langle \varphi_1, ..., \varphi_K | \Psi \rangle$$

die $\delta$-Funktion durch

$$\delta(\varphi^* - \varphi'^*) = \prod_{\alpha=1}^{K} \frac{1}{2\pi i} \int d\varphi_\alpha e^{(\varphi_\alpha^* - {\varphi'_\alpha}^*)\varphi_\alpha}$$

gegeben ist!

## Aufgabe 16 — $\delta$-Funktion, Fermionen

$\xi$ und $\xi'$ seien Grassmann-Variable. Definieren Sie eine Funktion $\delta(\xi - \xi')$, so dass für beliebige Funktionen $F(\xi)$

$$\int d\xi' \, \delta(\xi - \xi') F(\xi') = F(\xi)$$

gilt!

## Aufgabe 17 — Kettenregel für Funktionen von Grassmann-Variablen

Für $\alpha = 1, ..., n$ seien $\eta_\alpha(\xi)$ Funktionen der Grassmann-Variablen $\xi \in \mathcal{A}_-$ und $F(\eta_1, ..., \eta_n)$ eine Funktion der $\eta_\alpha$. (Es ist $\eta_\alpha(\xi) \in \mathcal{A}_-$). Beweisen Sie:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} F(\eta_1(\xi), ..., \eta_n(\xi)) = \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial \xi} \eta_\alpha(\xi) \, \frac{\partial}{\partial \eta_\alpha} F(\eta_1(\xi), ..., \eta_n(\xi) \Big|_{\xi=0} \quad !$$

**Aufgabe 18 — Gauß-Integral**

$\boldsymbol{H}$ mit den Elementen $H_{\alpha,\beta} \in \mathbb{C}$ sei eine hermitesche und invertierbare Matrix. Zeigen Sie, dass

$$\int \prod_\alpha d\eta_\alpha^* d\eta_\alpha \; e^{-\sum_{\alpha\beta} \eta_\alpha^* H_{\alpha\beta} \eta_\beta + \sum_\alpha (\zeta_\alpha^* \eta_\alpha + \eta_\alpha^* \zeta_\alpha) - \sum_{\alpha\beta} \zeta_\alpha^* H_{\alpha\beta}^{-1} \zeta_\beta} = \det \boldsymbol{H} \; ,$$

wobei $\eta_\alpha$ und $\zeta_\alpha$ Grassmann-Variable sind.

Hinweis: Benutzen Sie zunächst die Transformation

$$\xi_\alpha = \eta_\alpha - \sum_\gamma H_{\alpha\gamma}^{-1} \zeta_\gamma$$

und anschließend eine unitäre Transformation, so dass $\boldsymbol{H}$ diagonalisiert wird.