Übungen zur Quantentheorie der Vielteilchensysteme

Aufgabe 11 — Zeitabhängiger Vernichter
Beweisen Sie (durch Taylor-Entwicklung von $f(\lambda) = e^{\lambda A} B e^{-\lambda A}$ um $\lambda = 0$), die Baker-Hausdorff-Formel

$$e^{\lambda A} B e^{-\lambda A} = e^{-\lambda L_A} B$$

für zwei beliebige lineare Operatoren A, B, für $\lambda \in \mathbb{C}$ und $L_A(X) = [X, A]_-$, $L_A^2(X) = [[X, A]_-, A]_-$, etc.!

Nutzen Sie dieses Resultat, um die Zeitabhängigkeit des Vernichters $c_\alpha(t)$ im Heisenberg-Bild zu berechnen. Nehmen Sie dazu an, dass der Hamilton-Operator ein Ein-Teilchen-Operator ist:

$$H = \sum_{\alpha\beta} t_{\alpha\beta} c_\alpha^\dagger c_\beta \ .$$

Gibt es hier Unterschiede zwischen Fermionen und Bosonen?

Aufgabe 12 — Kohärente Zustände
Betrachten Sie den harmonischen Oszillator:

$$H = \omega \left(c^\dagger c + \frac{1}{2} \right) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 \ .$$

Für komplexes φ sei durch die Eigenwertgleichung des Vernichters,

$$c|\varphi\rangle = \varphi|\varphi\rangle \ ,$$

ein kohärenter Zustand $|\varphi\rangle$ definiert.

a) Geben Sie den kohärenten Zustand in Ortsdarstellung an, d.h. berechnen Sie $\varphi(q) = \langle q|\varphi\rangle$. Begründen und lösen Sie dazu die Differenzialgleichung

$$\frac{d}{dq}\varphi(q) = \left(\sqrt{2m\omega}\, \varphi(q) - m\omega q \right) \varphi(q) \quad !$$

b) Berechnen Sie die Erwartungswerte von Ort und Impuls, $\langle q \rangle$, $\langle p \rangle$, und die Varianzen $\Delta^2 q = \langle (q - \langle q \rangle)^2 \rangle$ und $\Delta^2 p = \langle (p - \langle p \rangle)^2 \rangle$ im Zustand $|\varphi\rangle$ und überprüfen Sie die Heisenbergsche Unschärferelation!

c) Das System befinde sich zur Zeit $t = 0$ im kohärenten Zustand $|\varphi\rangle$. Zeigen Sie, dass sich das System zu einer späteren Zeit t weiterhin in einem kohärenten Zustand

$|\varphi'(t)\rangle$ befindet und geben Sie $\varphi'(t)$ an! Berechnen Sie $\langle q\rangle_t$ udn $\langle p\rangle_t$!

d) Zeigen Sie, dass der Verschiebungsoperator

$$D(\varphi) = e^{\varphi c^\dagger - \varphi^* c}$$

die folgenden Eigenschaften besitzt:

$$\begin{aligned}
&D(\varphi)|0\rangle = |\varphi\rangle \\
&D(\varphi)^\dagger = D(-\varphi) \\
&D(\varphi)^{-1} = D(-\varphi) \\
&D(-\varphi)cD(\varphi) = c + \varphi \\
&D(-\varphi)F(c^\dagger, c)D(\varphi) = F(c^\dagger + \varphi^*, c + \varphi) \qquad !
\end{aligned}$$

(F ist hier eine beliebige analytische Funktion).

Aufgabe 13 — Skalarprodukt kohärenter Zustände
A und B seien Operatoren mit

$$[A, [A, B]_-]_- = [B, [A, B]_-]_- = 0\,.$$

Zeigen Sie, dass

$$e^{\lambda A} B e^{-\lambda A} = B + \lambda[A, B] \quad !$$

Beweisen Sie:

$$e^A e^B = e^{A+B+[A,B]/2}\,,$$

indem Sie die Differenzialgleichung

$$\frac{d}{d\lambda}(e^{\lambda A} e^{\lambda B}) = (A + B + \lambda[A, B])\,(e^{\lambda A} e^{\lambda B})$$

ableiten und lösen!

Nutzen Sie das Resultat, um eine zur Vorlesung alternative Berechnung des Skalarprodukts zweier kohärenter Zustände aufzuzeigen:

$$\langle \varphi_1 \cdots \varphi_K | \varphi'_1 \cdots \varphi'_K \rangle = \langle 0| \exp\left(\sum_\alpha \varphi^*_\alpha c_\alpha\right) \exp\left(\sum_\beta \varphi'_\beta c^\dagger_\beta\right) |0\rangle \qquad !$$