Übungen zur Quantentheorie der Vielteilchensysteme

Aufgabe 6 — Darstellung von Basiszuständen

Zeigen Sie:

$$|N; n_1, n_2, \cdots, n_\alpha, \cdots\rangle^{(\varepsilon)} = \left(\frac{(c_1^\dagger)^{n_1}}{\sqrt{n_1!}} \frac{(c_2^\dagger)^{n_2}}{\sqrt{n_2!}} \cdots \frac{(c_\alpha^\dagger)^{n_\alpha}}{\sqrt{n_\alpha!}} \cdots \right) |0\rangle \qquad !$$

Aufgabe 7 — Fundamentale (Anti-)Vertauschungsrelationen

Beweisen Sie die folgenden Antikommutatorrelationen für ein System von identischen Fermionen ($[A, B]_+ = AB + BA$):

$$[c_\alpha, c_\beta]_+ = 0 \qquad , \qquad [c_\alpha^\dagger, c_\beta^\dagger]_+ = 0 \qquad , \qquad [c_\alpha, c_\beta^\dagger]_+ = \delta_{\alpha\beta} \qquad !$$

Aufgabe 8 — Darstellung von Observablen

Gehen Sie analog zu der in der Vorlesung vorgestellten Argumentation für den Ein-Teilchen-Anteil einer Observablen vor, und leiten Sie so die folgende allgemeine Darstellung für den Zwei-Teilchen-Anteil her:

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1,\ldots,N}^{i \neq j} A_2^{(i,j)} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \langle \phi_\alpha \phi_\beta | A_2 | \phi_\gamma \phi_\delta \rangle \; c_\alpha^\dagger c_\beta^\dagger c_\delta c_\gamma \qquad !$$

Aufgabe 9 — Kommutatoren mit dem Besetzungszahloperator

Begründen Sie, dass die Kommutatorrelation

$$[c_\alpha, \widehat{n_\beta}]_- = \delta_{\alpha\beta} c_\alpha$$

sowohl für Bosonen als auch für Fermionen gilt!

Aufgabe 10 — Teilchenzahlerhaltung

Zeigen Sie, dass die Teilchenzahl für einen allgemeinen Hamilton-Operator der Form

$$H = \sum_{\alpha\beta} t_{\alpha\beta} c_\alpha^\dagger c_\beta + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} U_{\alpha\beta\gamma\delta} c_\alpha^\dagger c_\beta^\dagger c_\delta c_\gamma$$

mit beliebigen Matrixelementen $t_{\alpha\beta}$ und $U_{\alpha\beta\delta\gamma}$ eine Erhaltungsgröße ist!