Übungen zur Quantenmechanik II

Aufgabe 37 — Spin-Bahn-Wechselwirkung
Berechnen Sie $[\boldsymbol{L}, \boldsymbol{LS}]$ und $[\boldsymbol{S}, \boldsymbol{LS}]$ und zeigen Sie, dass $[\boldsymbol{L}+\boldsymbol{S}, \boldsymbol{LS}] = 0$!

Aufgabe 38 — γ-Matrizen
Gegeben sind 4×4-Matrizen γ^μ ($\mu = 0, ..., 3$), die durch die Eigenschaften

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$$

und

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$$

definiert sind.

a) Geben Sie eine spezielle Darstellung der Matrizen an (s. Vorlesung)!

b) Zeigen Sie, dass

$$\gamma^5 \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^5 = 0$$

für $\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$!

c) Zeigen Sie, dass

$$(\sigma^{\mu\nu})^\dagger = \gamma^0 \sigma^{\mu\nu} \gamma^0$$

und $(i, j, k = 1, 2, 3)$

$$\sigma^{ij} = -\sum_k \epsilon_{ijk} \gamma^0 \gamma^5 \gamma^k$$

für $\sigma^{\mu\nu} \equiv (i/2)[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$!

d) Es sei $\gamma_\mu \equiv g_{\mu\nu}\gamma^\nu$. Verifizieren Sie die folgenden Kontraktions-Identitäten:

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = 4 \qquad \gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\mu = -2\gamma^\alpha \qquad \gamma_\lambda \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda = 4g^{\mu\nu} \text{ !}$$

und zeigen Sie, dass

$$\gamma_\mu \not{A} \gamma^\mu = -2\not{A} \qquad \gamma_\mu \not{A} \not{B} \gamma^\mu = 4AB$$

für beliebige Operatoren A^μ, B^μ!

Aufgabe 39 — Fundamentale Skalare, Vektoren und Tensoren
Es sei ψ ein Dirac-Spinor und $\overline{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$ der adjungierte Spinor. Unter einer Lorentz-Transformation $x^\mu \to x'^\mu = L^\mu{}_\nu x^\nu$ transformiert sich der Spinor gemäß $\psi \to \psi' = S\psi$ bzw. $\overline{\psi} \to \overline{\psi}' = \overline{\psi} S^{-1}$, wobei S eine (von L abhängige) 4×4-Matrix ist, so dass

$$\gamma^\mu = L^\mu{}_\nu S \gamma^\nu S^{-1}$$

(s. Vorlesung).
Zeigen Sie, dass sich

$$\overline{\psi}\psi \ , \quad \overline{\psi}\gamma^\mu\psi \ , \quad \overline{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi \ , \quad \overline{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi \ , \quad \overline{\psi}\gamma^5\psi$$

unter einer Lorentz-Transformation als Skalar, Vektor, antisymmetrischer Tensor zweiter Stufe, Pseudo-Vektor bzw. Pseudo-Skalar verhalten ($S^{-1}\gamma^5 S = -\gamma^5$)!

Aufgabe 40 — Hamilton-Prinzip
Zeigen Sie, dass sich die Dirac-Gleichung aus der Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = c\overline{\psi}(x)(\not{p} - mc)\psi(x)$$

bei unabhängiger Variation von $\psi(x)$ und $\overline{\psi}(x)$ im Wirkungsintegral $S = \int d^4x \mathcal{L}$ ableiten lässt! Wie verhält sich $\mathcal{L}$ unter einer Lorentz-Transformation?

Aufgabe 41 — Potenzialtopf
Berechnen Sie die Energie-Eigenwerte eines Dirac-Teilchens in einem eindimensionalen unendlich hohen Potenzialtopf: $V(x) = q\phi(x) = 0$ für $|x| \leq \Delta$ mit $\Delta > 0$ und $V(x) = \infty$ sonst!