Übungen zur Quantenmechanik II

Aufgabe 32 — Plötzliche Änderung des Hamilton-Operators

Ein eindimensionaler harmonischer Oszillator (Masse m, Frequenz ω) befinde sich für $t < 0$ in seinem Grundzustand

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right) .$$

Zur Zeit $t = 0$ ändere sich die Frequenz vom Wert ω plötzlich auf einen Wert ω' (Änderung der Federkonstanten).

Berechnen Sie (durch elementare Überlegungen) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich der Oszillator zu einer Zeit $t > 0$ in seinem *neuen* Grundzustand befindet! Begründen Sie, dass die zeitabhängige Störungstheorie hier nicht direkt anwendbar ist!

Aufgabe 33 — Klein-Gordon-Gleichung

Rekapitulieren Sie die Ableitung der Wahrscheinlichkeitserhaltung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\boldsymbol{j} = 0$$

ausgehend von der Schrödinger-Gleichung.
Wie müssen ρ und $\boldsymbol{j}$ im Falle der Klein-Gordon-Gleichung

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\Psi = 0$$

definiert werden, damit die Kontinutätsgleichung gilt? Welches Problem tritt auf?

Aufgabe 34 — Matrizen α_i und β

Überzeugen Sie sich davon, dass die Antivertauschungsrelationen

$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\delta_{ij} , \qquad \beta\alpha_i + \alpha_i\beta = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

in einer Darstellung von α_i, β durch 4×4-Matrizen realisiert werden können, nicht aber in einer Darstellung durch 2×2- oder 3×3-Matrizen! Beachten Sie dabei, dass α_i, β hermitesch sein müssen!

Aufgabe 35 — Identität mit Pauli-Matrizen

Es sei $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ der Vektor bestehend aus den drei Pauli-Matrizen und $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ beliebige 3-komponentige Vektoren. Beweisen Sie:

$$(\boldsymbol{a\sigma})(\boldsymbol{b\sigma}) = \boldsymbol{ab} + i\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\ !$$

Aufgabe 36 — Spin-Operator
Für den Kommutator des Bahndrehimpulses $\boldsymbol{L}$ mit dem freien Dirac-Hamiltonian $H_0 = c\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{p} + \beta mc^2$ gilt $[\boldsymbol{L}, H_0]_- = i\hbar c\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{p}$.

Zeigen Sie, dass der Gesamtdrehimpuls $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$ und $\boldsymbol{p}\boldsymbol{S}$ Erhaltungsgrößen darstellen!