Übungen zur Quantenmechanik II

Aufgabe 25 — Wigner-Eckart-Theorem für Vektoren

$\boldsymbol{J}$ sei der Gesamtdrehimpuls, $\boldsymbol{V}$ ein Vektoroperator und $V_\pm = V_x \pm iV_y$. Zeigen Sie:

$$[V_\pm, J_z] = \mp\hbar V_\pm \ , \quad [V_\pm, J_\pm] = 0 \ , \quad [V_\pm, J_\mp] = \pm 2\hbar V_z \ !$$

Es sei jetzt $\{|\tau jm\rangle\}$ eine $(\boldsymbol{J}^2, J_z)$-Standard-ONB.

a) Zeigen Sie

$$\langle\tau' jm'|V_\pm|\tau jm\rangle = \langle\tau' jm \pm 1|V_\pm|\tau jm\rangle \ \delta_{m',m\pm 1}$$

unter Benutzung des ersten Kommutators oben!

b) Berechnen Sie damit und mithilfe des zweiten Kommutators den Ausdruck

$$\langle\tau' jm'| \, [V_\pm, J_\pm] \, |\tau jm\rangle$$

und folgern Sie, dass

$$M_\pm(\tau, \tau', j, m) = \frac{\langle\tau' jm \pm 1|V_\pm|\tau jm\rangle}{\langle jm \pm 1|J_\pm|jm\rangle}$$

unabhängig von m ist: $M_\pm(\tau, \tau', j, m) = M_\pm(\tau, \tau', j)$!

c) Benutzen Sie den dritten Kommutator um zu zeigen, dass

$$\langle\tau' jm'|V_z|\tau jm\rangle = \langle\tau' jm|V_z|\tau jm\rangle \ \delta_{m,m'}$$

und dass (unter Benutzung des Resultats b))

$$\langle\tau' jm|V_z|\tau jm\rangle = M_\pm(\tau, \tau', j)$$

und somit also $M_\pm(\tau, \tau', j) = M(\tau, \tau', j)$!

Begründen Sie zusammenfassend damit das Wigner-Eckart-Theorem für Vektoroperatoren:

$$\langle\tau' jm'|\boldsymbol{V}|\tau jm\rangle = M(\tau, \tau', j)\langle jm'|\boldsymbol{J}|jm\rangle \ !$$

Aufgabe 26 — Projektionstheorem

Leiten Sie aus dem Wigner-Eckart-Theorem für einen Vektoroperator $\boldsymbol{V}$ das Projektionstheorem ab:

$$\langle\tau' jm'|\boldsymbol{V}|\tau jm\rangle = \frac{\langle\tau' jm|\boldsymbol{V}\boldsymbol{J}|\tau jm\rangle}{\hbar^2 j(j+1)}\langle jm'|\boldsymbol{J}|jm\rangle \ !$$

Aufgabe 27 — Zeeman-Effekt
Betrachten Sie das Wasserstoff-Atom in einem äußeren Magnetfeld $\boldsymbol{B} = (0, 0, B) =$ const. Die Größen H, $\boldsymbol{L}^2$, $\boldsymbol{J}^2$ und J_z bilden einen vollständigen Satz von kommutierenden Observablen. Die zugehörige ONB sei $\{|nljm_j\rangle\}$.

Für die Eigenenergien gilt bei schwachem Feld:

$$E_{nljm_j} = E_n + \frac{\mu_B B}{\hbar}\langle nljm_j|(L_z + 2S_z)|nljm_j\rangle\ .$$

Berechnen Sie die Zeeman-Aufspaltung mit Hilfe des Projektionstheorems!

Berechnen Sie den g-Faktor für $s = 1/2$!

Aufgabe 28 — Ortsabhängige Phase
Eine Transformation ist allgemein gegeben durch einen (anti-)unitären Operator T, so dass

$$|\Psi\rangle \mapsto |\Psi'\rangle = T|\Psi\rangle\ ,$$

$$A \mapsto A' = TAT^\dagger$$

(s. Vorlesung, Wignersches Theorem).
Betrachten Sie speziell die Transformation, die für Wellenfunktionen, also in Ortsdarstellung, durch

$$\Psi(\mathbf{r}) \mapsto \Psi(\mathbf{r})' = e^{i\Lambda(\mathbf{r})}\Psi(\mathbf{r})$$

definiert ist! $\Lambda(\mathbf{r})$ ist eine vorgegebene ortsabhängige (reelle) Phase.

Wie lautet T in Ortsdarstellung? Ist T unitär? Wie transformieren sich Orts- und Impulsoperator? Welche physikalische Bedeutung hat diese Transformation?