Übungen zur Quantenmechanik II

Aufgabe 20 — Antilineare Operatoren
Lineare hermitesche Operatoren haben reelle Eigenwerte, und lineare unitäre Operatoren haben Eigenwerte vom Betrag eins.

Rekapitulieren Sie die entsprechenden Beweise, und überprüfen Sie, ob die Aussagen für antilinear hermitesche bzw. für antilinear unitäre Operatoren gültig bleiben! Konstruieren Sie gegebenenfalls ein Gegenbeispiel!

Aufgabe 21 — Eindeutigkeit von T
Zum Beweis der Eindeutigkeit des zu einer Symmetrietransformation $\mathcal{T}$ gehörigen (anti-)unitären Operators T wird das folgende Lemma benötigt (s. Vorlesung):

Sei X ein (linearer) Operator mit $[X, A] = 0$ für beliebige lineare hermitesche Operatoren A, dann ist $X = c \cdot \mathbf{1}$ mit einer komplexen Zahl c.

Beweisen Sie dieses Lemma!

Aufgabe 22 — Eindimensionale Lie-Gruppen
$G = \{T(\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ mit $T(\lambda) \in \mathbb{C}$ sei eine eindimensionale Lie-Gruppe, d.h. es gelte

$$T(\lambda)\, T(\mu) = T(f(\lambda, \mu))$$

mit einer analytischen Funktion f. Beweisen Sie: G ist lokal isomorph zu $U(1)$ und zeigen Sie dazu:

a) Durch Umparametrisierung kann stets $T(0) = 1$ erreicht werden!

b) Es gilt $f(0, 0) = 0$ (setzen Sie eine umkehrbar eindeutige Parametrisierung voraus)!

c) $f(\lambda, \mu) = \lambda + \mu$ für $\lambda, \mu \to 0$!

Aufgabe 23 — Strukturkonstanten
a) Zeigen Sie, dass die Operatoren p_x, x und $\mathbf{1}$ eine Lie-Algebra bilden (Heisenberg-Algebra) und bestimmen Sie die Strukturkonstanten!

b) Beweisen Sie die Jacobi-Identität

$$[[A,B],C]+[[B,C],A]+[[C,A],B]=0$$

für beliebige Operatoren A, B, C, und leiten Sie daraus die Relation

$$\sum_l (C^l_{ij}C^m_{lk}+C^l_{jk}C^m_{li}+C^l_{ki}C^m_{lj})=0$$

für die Strukturkonstanten einer Lie-Algebra ab!

c) Bestimmen Sie die Strukturkonstanten von $GL(N,\mathbb{R})$!

Aufgabe 24 — Drehungen im Spinor-Raum

a) Berechnen Sie für ein Teilchen mit Spin s den Operator

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar}2\pi\, S_y\right)$$

und diskutieren Sie den Unterschied zwischen ganz- und halbzahligem Spin!

b) Berechnen Sie für ein Teilchen mit Spin $s=1/2$:

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\varphi\, S_y\right)$$

für beliebiges, reelles φ und interpretieren Sie den Operator als eine Drehung im zweidimensionalen Spinor-Raum!

c) Was ergibt sich bei Anwendung auf die Eigen-Spinoren $|+\rangle$ und $|-\rangle$ von S_x? Schreiben Sie das Ergebnis $\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\varphi\, S_y\right)|\pm\rangle$ als $|\boldsymbol{e}_+\rangle$ bzw. als $|\boldsymbol{e}_-\rangle$ mit den in Aufgabe 14 definierten Zuständen!

d) Interpretieren Sie jetzt $\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\varphi\, S_y\right)|\pm\rangle$ als Eigen-Spinoren einer im dreidimensionalen Anschauungsraum gedrehten Spin-Messapparatur, d.h. als Eigen-Spinoren von $\boldsymbol{S}\boldsymbol{e}$ mit Einheitsvektor $\boldsymbol{e}=(\sin\vartheta_e\cos\varphi_e,\sin\vartheta_e\sin\varphi_e,\cos\vartheta_e)$!

Was passiert bei einer Drehung um $\varphi=2\pi$?