Übungen zur Quantenmechanik II

Aufgabe 11 — Teilchen im elektronagnetischen Feld
Betrachten Sie ein Teilchen (Masse m, Ladung q) in einem elektrischen

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\nabla\varphi(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$$

und einem magnetischen Feld

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r},t)\ .$$

$\varphi(\mathbf{r},t)$ und $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ sind das skalare bzw. das Vektorpotenzial, c die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit.

a) Überzeugen Sie sich, dass die *klassische* Lagrange-Funktion gegeben ist durch

$$L(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}},t) = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - q\varphi(\mathbf{r},t) + \frac{q}{c}\,\dot{\mathbf{r}}\,\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\ !$$

b) Bestimmen Sie den zur Koordinate $\mathbf{r}$ konjugierten Impuls $\mathbf{p} = \partial L/\partial\,\dot{\mathbf{r}}$ und vergleichen Sie mit dem kinematischen (mechanischen) Impuls!

c) Leiten Sie die klassische Hamilton-Funktion her! Nutzen Sie dann das Korrespondenzprinzip und schließen Sie damit (unter Beachtung der Symmetrisierungsvorschrift) auf den Hamilton-Operator!

d) Stellen Sie die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung auf (Ortsdarstellung) und leiten Sie eine Kontinuitätsgleichung ab, die die Wahrscheinlichkeitserhaltung beschreibt!

Aufgabe 12 — Drehimpuls-Algebra
a) $\mathbf{J}$ sei ein Drehimpuls. Zeigen Sie:

$$[\mathbf{a}\cdot\mathbf{J},\mathbf{b}\cdot\mathbf{J}] = i\hbar\,\mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{J} \qquad (\mathbf{a},\,\mathbf{b}\text{ beliebige Vektoren})\ !$$

b) $\boldsymbol{J}_1$ und $\boldsymbol{J}_2$ seien Drehimpulse. Zeigen Sie:

$$\boldsymbol{J}_1\boldsymbol{J}_2 = J_{1z}J_{2z} + \frac{1}{2}\left(J_{1+}J_{2-} + J_{1-}J_{2+}\right)\ !$$

c) $\{|jm\rangle\}$ sei eine ONB gemeinsamer Eigenzustände von $\mathbf{J}^2$ und J_z. Es gilt $J_\pm|jm\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1)-m(m\pm1)}\;|jm\pm1\rangle$. Zeigen Sie, dass

$$|jm\rangle = \sqrt{\frac{(j+m)!}{(2j)!(j-m)!}}\;\hbar^{m-j}\,J_\mp^{j-m}|j\pm j\rangle\ !$$

Aufgabe 13 — Bahn- und Spin-Raum

Für ein Teilchen mit Spin S ist der Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ durch das Produkt von Bahn- und Spin-Raum gegeben:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathrm{B}} \otimes \mathcal{H}_{\mathrm{S}} .$$

Warum ist es eigentlich nicht möglich, $\mathcal{H}$ als direkte (orthogonale) Summe

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathrm{B}} \oplus \mathcal{H}_{\mathrm{S}} .$$

zu definieren? Zeigen Sie, dass dies zu Widersprüchen führen würde!

Aufgabe 14 — Spinpolarisation

Betrachten Sie den zweidimensionalen Spin-Raum $\mathcal{H}_S$ zu $S = 1/2$ und Observable Elektronenspin

$$\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2}(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) = \frac{\hbar}{2}\sigma = \frac{\hbar}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) .$$

$\mathbf{P} = (P_x, P_y, P_z)$ sei ein Vektor mit reellen P_i, so dass $|\mathbf{P}| \leq 1$ ("Spinpolarisation"). Das System befinde sich in einem (reinen oder gemischten) Zustand, der durch die 2×2 Dichtematrix

$$\rho = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{P} \cdot \sigma)$$

gegeben ist.

a) Verifizieren Sie, dass ρ normiert ist: $\mathrm{Sp}(\rho) = 1$!
b) Untersuchen Sie, für welches $\mathbf{P}$ ein reiner Zustand vorliegt!
c) Zeigen Sie, dass $\langle \sigma_i \rangle = P_i$ für $i = x, y, z$!
d) Es sei $\mathbf{P} = (0, 0, P)$. Zeigen Sie, dass $P = (N_\uparrow - N_\downarrow)/(N_\uparrow + N_\downarrow)$ wobei $N_{\uparrow,\downarrow}$ die Zahl der Elektronen mit Spin $m_s = \uparrow, \downarrow$ ist!
e) $\mathbf{e} = (\sin\vartheta \sin\varphi, \sin\vartheta \cos\varphi, \cos\vartheta)$ sei der Einheitsvektor in (ϑ, φ)-Richtung. Bestimmen Sie die Eigenwerte der $\mathbf{e}$-Komponente des Spins, $\mathbf{S} \cdot \mathbf{e}$, und zeigen Sie, dass

$$|\mathbf{e}_+\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta/2) \\ e^{i\varphi} \sin(\vartheta/2) \end{pmatrix} \qquad |\mathbf{e}_-\rangle = \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta/2) \\ e^{i\varphi} \cos(\vartheta/2) \end{pmatrix}$$

orthonormierte Eigenzustände von $\mathbf{S} \cdot \mathbf{e}$ sind!
f) Das System befinde sich im Zustand $\rho = (1 + \mathbf{P} \cdot \sigma)/2$ mit $P = (0, 0, P)$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird bei einer Messung von $\mathbf{S} \cdot \mathbf{e}$ das Resultat $\pm\hbar/2$ gefunden? Diskutieren Sie die ϑ, φ-Abhängigkeit und den Fall $P = 0$!