Übungen zur Quantenmechanik II

Aufgabe 7 — Darstellung

$\{|n\rangle\}$ mit $n = 1, 2, ..., L$ sei eine ONB des Hilbert-Raums (L-dimensional) und

$$A = \sum_{n=1}^{L} |n\rangle\langle n+1|$$

ein linearer Operator, wobei per Definition $|L+1\rangle = |1\rangle$ (periodische Randbedingungen).

a) Untersuchen Sie A auf Hermitizität und Unitarität!

b) Finden Sie die zu A gehörige Matrix in der n-Darstellung!

c) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A!

d) Konstruieren Sie die Eigenzustände der zu A gehörigen Matrix und damit die Eigenzustände des Operators A! Geben Sie, falls möglich, eine Orthonormalbasis des Hilbert-Raums an, die aus gemeinsamen Eigenzuständen von A und $A^\dagger$ besteht!

e) Es sei $H = E_0 + W(A + A^\dagger)$ mit reellen Parametern E_0 und W. Wie sieht H in der E-Darstellung aus? Geben sie Eigenwerte und Eigenzustände von H an!

Aufgabe 8 — Dyson-Reihe

Folgern Sie aus der Schrödinger-Gleichung,

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle = H_t|\Psi(t)\rangle \,,$$

dass

$$|\Psi(t+dt)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}H_t dt\right)|\Psi(t)\rangle$$

und dass somit

$$U(t+dt, t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}H_t dt\right) \,,$$

wobei H_t explizit zeitabhängig sein kann!

Begründen Sie damit die Darstellung

$$U(t,0) = T \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_0^t H_\tau d\tau\right)$$

(T: Zeitordnungsoperator) für den Zeitentwicklungsoperator!

Aufgabe 9 — Gleiche Erwartungswerte

Gegeben seien die Operatoren A und B. Zeigen Sie, dass $A = B$, falls A und B in jedem Zustand $|\Psi\rangle$ den gleichen Erwartungswert besitzen!

Aufgabe 10 — Wechselwirkungsbild

Leiten Sie für Wechselwirkungsbild (Dirac-Bild) mit $H_t = H_0 + V_t$ die folgenden Bewegungsgleichungen ab!

Zustand:

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\Psi^{(D)}(t)\rangle = V_t^{(D)}(t)|\Psi^{(D)}(t)\rangle\ ,$$

Observable:

$$i\hbar\frac{d}{dt}A_t^{(D)}(t) = [A_t^{(D)}(t), H_0] + i\hbar\frac{\partial}{\partial t}A_t^{(D)}(t)\ ,$$

Dichteoperator:

$$i\hbar\frac{d}{dt}\rho^{(D)}(t) = [V_t^{(D)}(t), \rho^{(D)}(t)]\ .$$