

Übungen zur Quantenmechanik II

Aufgabe 1 — dyadisches Produkt

Bestimmen Sie den zum dyadischen Produkt $|\alpha\rangle\langle\beta|$ adjungierten Operator!

Aufgabe 2 — Operatorpotenz

A und B seien lineare Operatoren mit

$$[A, B] = i.$$

Zeigen Sie, dass

$$[A, B^n] = inB^{n-1}, \quad [A^n, B] = inA^{n-1},$$

$$[A, e^A] = 0, \quad [A, e^B] = ie^B \quad !$$

Aufgabe 3 — Exponentialfunktion

λ sei ein reeller Parameter, und A und B seien (nicht von λ abhängige) lineare Operatoren.

a) Schreiben Sie

$$e^{\lambda A} B e^{-\lambda A} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \lambda^n$$

und berechnen Sie die Koeffizienten α_n (α_n Operatoren)!

b) Zeigen Sie, dass aus

$$[A, [A, B]] = 0$$

folgt:

$$e^{\lambda A} B e^{-\lambda A} = B + \lambda[A, B] \quad !$$

c) Benutzen Sie 1) und 2), um die Differenzialgleichung

$$\frac{d}{d\lambda}(e^{\lambda A} e^{\lambda B}) = (A + B + \lambda[A, B]) (e^{\lambda A} e^{\lambda B})$$

für $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$ abzuleiten!

d) Beweisen Sie mit 3) für $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$, dass:

$$e^A e^B = e^{A+B+[A,B]/2} !$$

Aufgabe 4 — Dichteoperator

Untersuchen Sie, inwieweit sich die charakteristischen Eigenschaften des Dichteoperators,

$$\rho = \sum_k w_k |\Psi_k\rangle \langle \Psi_k|$$

ändern, wenn die Zustände $|\Psi_k\rangle$ zwar normiert aber nicht paarweise orthogonal sind!

Aufgabe 5 — Heisenbergsche Unschärferelation

Betrachten Sie den Beweis der Unschärferelation

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle|$$

für einen beliebigen *gemischten* Zustand. Diskutieren Sie den Spezialfall $\Delta B = 0$!

Aufgabe 6 — Matrixdarstellung eines Operators

Gegeben ist ein zweidimensionaler Hilbert-Raum \mathcal{H} mit einer Orthonormalbasis $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle\}$. A sei ein linearer Operator in \mathcal{H} mit:

$$A|\phi_1\rangle = i|\phi_2\rangle, \quad A|\phi_2\rangle = -i|\phi_1\rangle.$$

- Begründen Sie, dass A eindeutig definiert ist!
- Zeigen Sie, dass A hermitesch ist!
- Konstruieren Sie die Matrixdarstellung von A in der Orthonormalbasis $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle\}$!
- Welche Eigenwerte besitzt A ?
- Konstruieren Sie eine ONB aus Eigenzuständen von A !