Übungen zur Mathematik für Ingenieure II

Aufgabe 35 — Produktregel

Beweisen Sie

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{x}(t)\cdot\vec{y}(t)\right) = \frac{d\vec{x}(t)}{dt}\cdot\vec{y}(t) + \vec{x}(t)\cdot\frac{d\vec{y}(t)}{dt}$$

und

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{x}(t)\times\vec{y}(t)\right) = \frac{d\vec{x}(t)}{dt}\times\vec{y}(t) + \vec{x}(t)\times\frac{d\vec{y}(t)}{dt}$$

für beliebige differenzierbare Kurven $\vec{x},\vec{y}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ durch Rückführung auf bekannte Rechenregeln für Funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$!

Aufgabe 36 — Kurven im $\mathbb{R}^n$

a) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Ellipse

$$\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{b}\right)^2 = 1\,, \qquad a,b\in\mathbb{R}$$

an!

b) Welche Kurve im $\mathbb{R}^2$ ist durch

$$x_2 = R\sin\arccos(x_1/R)\,, \qquad R>0$$

gegeben?

c) Parametrisieren Sie die Kurve

$$\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid x_1^4 - x_3 = 0\ ,\ x_2^2 + x_2 - x_3 - x_1^2 = 0\}$$

und geben Sie den Tangenteneinheitsvektor im Punkt 0 an!

d) Welches Objekt ist gegeben durch

$$\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_3\cos x_3\ ,\ x_2 = x_3\sin x_3\} \quad ?$$

Konstruieren Sie die Tangente im Punkt 0!

Aufgabe 37 — Bogenlänge

Zeigen Sie, dass die Länge der Spur einer Kurve im $\mathbb{R}^n$ nicht von der Wahl der Parametrisierung abhängt!

(Hinweis: Betrachten Sie zwei Kurven $\vec{x}(t)$ und $\vec{y}(t')$ mit gleichen Anfangs- und Endpunkten a und b und eine bijektive Abbildung $f : [a,b] \to [a,b]$ mit $t = f(t')$. Nutzen Sie die Definition der Bogenlänge und verwenden Sie die Substitutionsregel!)

Aufgabe 38 — Begleitendes Dreibein
Gegeben ist die Schraubenlinie

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -R\cos\omega t \\ R\sin\omega t \\ v\,t \end{pmatrix} , \qquad \omega, R, v > 0\,.$$

a) Berechnen Sie den Tangenteneinheitsvektor, den Normaleneinheitsvektor und den Binormaleneinheitsvektor $\vec{T}(t), \vec{N}(t), \vec{B}(t)$!

b) Bestimmen Sie die Bogenlänge $s(t)$!

c) Geben Sie die Krümmung $\kappa(t)$ und die Torsion $\tau(t)$ an und diskutieren Sie die Grenzfälle $v \to 0$ und $v \to \infty$!

d) Skizzieren Sie die Schraubenlinie und zeichnen Sie das begleitende Dreibein bei $t = 0$!

e) Wie lautet die Schraubenlinie in ihrer natürlichen Parametrisierung? Verifizieren Sie, dass der Tangentenvektor hier bereits normiert ist!

Aufgabe 39 — Stetigkeit
Eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \frac{x_1^2 x_2}{x_1^4 + x_2^2} \qquad \text{für} \quad (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ f(x_1, x_2) &= 0 \qquad\qquad \text{für} \quad (x_1, x_2) \neq (0,0)\,. \end{aligned}$$

Untersuchen Sie die Stetigkeit der Funktion entlang der folgenden Wege im $\mathbb{R}^2$:

a) $t \mapsto (t, 0)$,
b) $t \mapsto (0, t)$,
c) $t \mapsto (t, t)$,
d) $t \mapsto (t, t^2)$.

Ist f stetig in $(0,0)$?