Übungen zur Mathematik für Ingenieure II

Aufgabe 29 — Selbstadjungierte Abbildungen
Definiere:

$$V = \{f : [0,1] \to \mathbb{C} \mid f \text{ unendlich oft differenzierbar, } f(0) = f(1) = 0\}\ .$$

Mit der wie üblich definierten Addition und skalaren Multiplikation ist V ein komplexer Vektorraum. Definiere weiter für $f, g \in V$:

$$\langle f|g\rangle = \int_0^1 dx\, f(x)^*\, g(x)\ .$$

$\langle \cdots | \cdots \rangle$ ist ein Skalarprodukt, und V ist mit dem Skalarprodukt ein unitärer Raum.

Zeigen Sie, dass die (lineare) Abbildung

$$i\frac{d}{dx} : V \to V \qquad i\frac{d}{dx} f(x) \mapsto i f'(x) = \frac{df}{dx}(x)$$

selbstadjungiert ist!

Aufgabe 30 — Leibniz-Formel
a) Benutzen Sie die Leibniz-Formel, und überprüfen Sie damit die Multilinearität, die Antisymmetrie und die Normierung der Determinante!

b) A sei eine $(n-1) \times (n-1)$-Matrix. Benutzen Sie die Leibniz-Formel, um zu zeigen, dass

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ . & & & \\ . & & A & \\ . & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \det A\ !$$

Aufgabe 31 — Matrixinversion mit Hilfe von Determinanten
Berechnen Sie die Inverse der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und nutzen Sie dazu den Adjunktensatz!

Aufgabe 32 — Lösen von Gleichungssystemen mit Cramerscher Regel
Lösen Sie das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \; !$$

Nutzen Sie dazu die Cramersche Regel!

Aufgabe 33 — Matrixfunktion
A sei eine diagonalisierbare $n \times n$-Matrix mit reellen positiven Eigenwerten. Zeigen Sie:

$$\mathsf{Sp}(\ln A) = \ln(\det A) \; !$$

Aufgabe 34 — Diagonalisierung von 2×2-Matrizen
Gegeben seien folgende reelle 2×2 Matrizen:
a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

c)

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; .$$

Fassen Sie die Matrizen als lineare Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ auf und überlegen Sie sich, was diese Abbildungen anschaulich bedeuten!
Versuchen Sie (anschaulich) jeweils eine Basis von Eigenvektoren zu konstruieren!
In welchen Fällen gelingt dies nicht und warum nicht?
Finden Sie jeweils die Eigenwerte als Nullstellen des charakteristischen Polynoms!