Übungen zur Mathematik für Ingenieure II

Aufgabe 24 — Zyklische Invarianz der Spur

A, B seien $n \times n$-Matrizen. Zeigen Sie: $\mathrm{Sp}(AB) = \mathrm{Sp}(BA)$!

$A_1, ..., A_k$ seien $n \times n$-Matrizen. Zeigen Sie: $\mathrm{Sp}(A_1 \cdots A_k) = \mathrm{Sp}(A_k A_1 \cdots A_{k-1})$!

Aufgabe 25 — Lineare Gleichungssysteme

Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

a) Untersuchen Sie das homogene Gleichungssystem $A\vec{x} = 0$ auf eindeutige Lösbarkeit!

b) Untersuchen Sie das inhomogene Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ auf Lösbarkeit und eindeutige Lösbarkeit für $\vec{b} = (1, 0, 0, 0)^T$! Geben Sie ggfs. die allgemeine Lösung an!

c) Was gilt für $A\vec{x} = \vec{b}$ mit $\vec{b} = (0, 0, 0, 1)^T$?

d) Wenden Sie das Gauß'sche Eliminationsverfahren auf $A\vec{x} = \vec{b}$ mit $\vec{b} = (1, 0, 0, 0)^T$ und $\vec{b} = (0, 0, 0, 1)^T$ an, um jeweils die allgemeine Lösung zu konstruieren!

Aufgabe 26 — Geometrische Bedeutung der Determinante

Zeigen Sie, dass das durch zwei Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \in \mathbb{R}^2$ aufgespannte Parallelogramm die Fläche

$$F = |\det A| = |\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2)|$$

besitzt!

Zeigen Sie, dass der durch drei Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \in \mathbb{R}^3$ aufgespannte Spat das Volumen

$$V = |\det A| = |\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)|$$

besitzt!

Aufgabe 27 — Berechnung von Determinanten
Berechnen Sie mit Hilfe des Laplace'schen Entwicklungssatzes:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 3 & 0 \\ 6 & -3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & -4 & 6 \end{pmatrix} !$$

Aufgabe 28 — Rang einer transponierten Matrix
Beweisen Sie für eine $m \times n$-Matrix:

$$\text{rang} A = \text{rang} A^T \ !$$

Anleitung:
Definieren Sie, analog zu elementaren Zeilenumformungen, zwei Typen von elementaren Spaltenumformungen, und zeigen Sie, dass wiederholtes Anwenden durch

$$A \mapsto A' = A \cdot T$$

beschrieben werden kann, wobei T eine invertierbare $n \times n$-Matrix ist!

Begründen Sie, dass $\text{rang} A = \text{rang}(A \cdot T)$!

Zeigen Sie, dass A durch wiederholtes Anwenden von elementaren Zeilenumformungen und anschließenden elementaren Spaltenumformungen stets auf die Form

$$A'' = S \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \text{Mat}(m \times n, \mathbb{K})$$

mir $r \leq m, n$ gebracht werden kann, wobei E_r die $r \times r$-Einheitsmatrix ist!

Beweisen Sie jetzt: $\text{rang} A = \text{rang} A'' = \text{rang} A^T$!