Einführung in die Theoretische Physik II

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe 1 — Gradient
Für ein skalares Feld $\varphi(\boldsymbol{r})$ ist der Gradient definiert als:

$$\text{grad}\,\varphi(\boldsymbol{r}) = \begin{pmatrix} \partial\varphi(\boldsymbol{r})/\partial x \\ \partial\varphi(\boldsymbol{r})/\partial y \\ \partial\varphi(\boldsymbol{r})/\partial z \end{pmatrix} = \nabla\varphi(\boldsymbol{r})\,.$$

Das Gradientenfeld $\nabla\varphi(\boldsymbol{r})$ ist also ein Vektorfeld.

Betrachten Sie folgenden Ausdrücke:

$$(a)\quad \text{grad}\,y\,,\quad (b)\quad \text{grad}\,\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\,,\quad (c)\quad \text{grad}\,r\,,\quad (d)\quad \text{grad}\,\frac{1}{r}\,,\quad (e)\quad \text{grad div}\,r^2\,,$$
$$(f)\quad \text{grad div}\,\boldsymbol{r}\,,\quad (g)\quad \text{div grad}\,(xyz)\,,\quad (h)\quad \text{grad rot}\,\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\,,\quad (i)\quad \text{rot grad}\,r\,,$$

Welche Ausdrücke sind nicht sinnvoll, d.h., nicht definiert?
Schreiben Sie die verbleibenden sinnvollen Ausdrücke mit Hilfe des Nabla-Operators und berechnen Sie diese!

Zur Erinnerung: Für ein Verktorfeld $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ definiert man:

$$\text{div}\,\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \nabla\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \frac{\partial F_x(\boldsymbol{r})}{\partial x} + \frac{\partial F_y(\boldsymbol{r})}{\partial y} + \frac{\partial F_z(\boldsymbol{r})}{\partial z}$$
$$\text{rot}\,\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \nabla\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_x + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{e}_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_z$$

Aufgabe 2 — Gradient und Niveauflächen
Gegeben ist ein skalares Feld $\varphi(\boldsymbol{r})$.

(a) Begründen Sie, warum durch

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = c \qquad \text{mit } c = \text{const.}$$

eine (gekrümmte) Fläche im Raum definiert wird! Die Flächen für verschiedene c heißen Niveauflächen.

(b) Welche Form haben die Niveauflächen für

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

also die sogenannten Äquipotentialflächen des Potenzials einer Punktladung q im Ursprung?

(c) Zeigen Sie, dass der Gradient eines beliebigen skalaren Felds $\varphi(\boldsymbol{r})$ stets senkrecht auf den Niveauflächen steht!

Hinweis: Betrachten Sie eine in der Niveaufläche verlaufende Kurve $\boldsymbol{r}(\lambda)$, also eine Kurve, für $\varphi(\boldsymbol{r}(\lambda)) = c$ für alle λ gilt!

Hausaufgaben

Aufgabe 1 — Gradient eines radialsymmetrischen Felds
(4 Punkte) $\varphi(\boldsymbol{r}) = \varphi(r)$ sei ein skalares Feld, das nur vom Betrag von $\boldsymbol{r}$ abhänge. Zeigen Sie, dass für solche radialsymmetrischen Felder gilt:

$$\text{grad}\,\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{d\varphi(r)}{dr}\,\boldsymbol{e}_r\ ,$$

wobei $\boldsymbol{e}_r$ der Einheitsvektor in r-Richtung ist!

Berechnen Sie den Gradienten des Felds

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = a\frac{\sin(br)}{r^5}\ !$$

a, b sind Konstanten.

Aufgabe 2 — Laplace-Operator
(4 Punkte) Berechnen Sie $\Delta\frac{1}{r}$ für $r > 0$! Hinweis: $\Delta = \text{div}\,\text{grad}$.

Aufgabe 3 — Kontinuitätsgleichung
(schwierig, 0 Punkte!) Betrachten Sie die Ladungsdichte und die Stromdichte,

$$\rho(\boldsymbol{r},t) = \sum_{i=1}^{N} q_i\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i(t))\ , \qquad \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) = \sum_{i=1}^{N} q_i\dot{\boldsymbol{r}}_i(t)\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i(t))\ ,$$

eines Systems von N Punktladungen q_i $(i = 1, ..., N)$, die sich auf Trajektorien $\boldsymbol{r}_i(t)$ bewegen, und zeigen Sie:

$$\frac{\partial\rho(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} + \text{div}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) = 0 \qquad !$$

Hinweis: Rechnen Sie mit $\delta(...)$ so wie mit einer “normalen” Funktion.