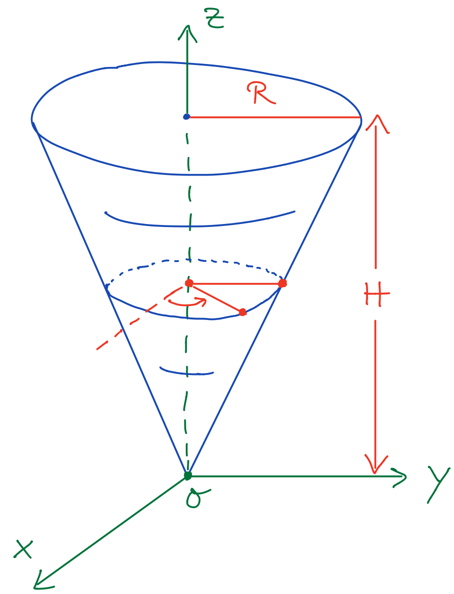
Einführung in die Theoretische Physik II

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe 1 — Kegel: Geometrie und elektrischer Fluss
Der Flächeninhalt A der Mantelfläche eines geraden Kreiskegels (Höhe H, Radius R, siehe Zeichnung) kann durch das Flächenintegral $A = \int_{\text{Mantel}} da$ bestimmt werden.



a) Argumentieren Sie, dass

$$\boldsymbol{r}(\varphi, z) = \begin{pmatrix} \frac{R}{H} z \cos\varphi \\ \frac{R}{H} z \sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

eine mögliche Parametrisierung der Mantelfläche darstellt! Welche Wertebereiche müssen die Parameter φ und z durchlaufen?

b) Berechnen Sie das vektorielle Flächenelement $d\boldsymbol{a}$ nach der allgemeinen Formel aus der Vorlesung, und beachten Sie, dass $d\boldsymbol{a}$ stets nach außen zeigen soll!

c) Berechnen Sie den Betrag $da = |d\boldsymbol{a}|$ des Flächenelements!

d) Zum Schluss ist $A = \int da$ zu berechnen, also durch ein Doppelintegral über φ und z.

e) Das Ergebnis, nämlich $A = \pi R\sqrt{R^2 + H^2}$, lässt sich durch eine einfache geometrische Überlegung auch direkt, ohne Flächenintegral, ableiten. Wie?

f) Wie groß ist der Fluss des elektrischen Felds

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z \end{pmatrix}$$

mit E_z =const. durch den Mantel?

g) Wie groß ist der elektrische Fluss durch die Grundfläche?

h) Ist der Gauß'sche Satz erfüllt?

Hausaufgaben

Aufgabe 1 — Gauß'scher Satz
Betrachten Sie einen Zylinder der Höhe H mit Kreisen vom Radius R als Deckflächen. Die Symmetrieachse sei identisch mit der z-Achse. Der Koordinatenursprung liege in der Mitte der unteren Deckfläche (Grundfläche).

a) (2 Punkte) Benutzen Sie Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z), und geben Sie eine Parameterdarstellung der Mantelfläche des Zylinders, $\boldsymbol{r}(\varphi, z)$, sowie Parameterdarstellungen der Deckflächen, $\boldsymbol{r}(\rho, \varphi)$, an!

b) (3 Punkte) Berechnen Sie die vektoriellen Flächenelemente für die Mantelfläche und für die Deckflächen! Benutzen Sie dazu die in der Vorlesung abgeleitete allgemeine Formel für $d\boldsymbol{a}$, und wählen Sie das Vorzeichen von $d\boldsymbol{a}$ so, dass $d\boldsymbol{a}$ nach außen zeigt!

c) (2 Punkte) Gegeben ist das Vektorfeld

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \alpha \begin{pmatrix} xz \\ yz \\ -z^2 \end{pmatrix} .$$

α ist eine Konstante. Berechnen Sie den Fluss des Vektorfelds durch die Mantelfläche! Berechnen Sie den Fluss von $\boldsymbol{E}$ durch die Deckflächen! Hinweis: Drücken Sie das Feld dazu zunächst in Zylinderkoordinaten aus, d.h., zeigen Sie, dass

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \alpha z \rho \boldsymbol{e}_\rho - \alpha z^2 \boldsymbol{e}_z \,!$$

d) (1 Punkt) Berechnen Sie die Divergenz des Vektorfelds! Hinweis: Hier ist die Verwendung von kartesischen Koordinaten am einfachsten.
Berechnen Sie das Volumenintegral von div$\boldsymbol{E}$ über das Zylindervolumen! Hinweis: Hier ist nicht viel zu tun!
Ist der Gauß'sche Satz erfüllt?