Einführung in die Theoretische Physik II

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe 1 — Krummlinige Koordinaten
a) Verwenden Sie die Transformationsformeln für den Übergang von kartesischen Koordinaten x, y, z zu Kugelkoordinaten r, ϑ, φ,

$$x = r \sin\vartheta \cos\varphi \,, \qquad y = r \sin\vartheta \sin\varphi \,, \qquad z = r \cos\vartheta \,,$$

und drücken Sie die folgenden Größen in Kugelkoordinaten aus:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \,, \quad z \,, \quad x^2 + y^2 \,, \quad y/x \;!$$

b) Skizzieren Sie die ρ-Linien, die φ-Linien und die z-Linien im Falle von Zylinderkoordinaten:

$$x = \rho \cos\varphi \,, \qquad y = \rho \sin\varphi \,, \qquad z = z \,.$$

Skizzieren Sie die (nicht notwendig ebenen) Flächen $\rho =$ const., $\varphi =$ const. und $z =$ const.!

c) Berechnen Sie die lokalen Basisvektoren $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\vartheta$, $\boldsymbol{e}_\varphi$ für Kugelkoordinaten, und zeigen Sie, dass diese an jedem Punkt im Raum eine Orthonormalbasis bilden!

Aufgabe 2 — Volumenelement
In kartesischen Koordinaten lautet das Volumenelement $dV = d^3r = dxdydz$.
Parabolische Zylinderkoordinaten u, v, z sind über die Transformationsformeln

$$x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \,, \qquad y = uv \,, \qquad z = z$$

definiert. Berechnen Sie die entsprechende Jacobi-Determinante und zeigen Sie, dass für das Volumenelement dV in parabolischen Zylinderkoordinaten gilt:

$$dV = d^3r = (u^2 + v^2) du dv dz \;!$$

Aufgabe 3 — Volumenintegral
Berechnen Sie

$$\int_V d^3r \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \;!$$

Das Integral erstreckt sich dabei über das Volumen V, das zwischen den Oberflächen zweier konzentrischer Zylinder eingeschlossen ist. Die Zylinder haben die z-Achse als gemeinsame Symmetrieachse, haben gleiche Höhe H aber verschiedene Radien $R_1 < R_2$. Verwenden Sie dazu geeignete krummlinige Koordinaten und das entsprechende Volumenelement!

Hausaufgaben

Aufgabe 1 — Ladungsdichte und Stromdichte
a) (1 Punkt) Ein Zylinder mit Radius R und Höhe H sei homogen geladen. Die Gesamtladung ist Q. Geben Sie die Ladungsdichte $\rho(\boldsymbol{r})$ im Innern und außerhalb des Zylinders an!

b) (1 Punkt) Durch das Innere eines unendlich langen Zylinders mit Radius R und der z-Achse als Symmetrieachse fließe der Strom I in $(-z)$-Richtung. Die Stromdichte im Inneren sei konstant. Geben Sie $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ an!

Aufgabe 2 — Volumenelement
a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Funktionaldeterminante für den Übergang von kartesischen nach Zylinderkoordinaten durch

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,z)} = \rho$$

gegeben ist, dass also $dV = d^3r = \rho\, d\rho d\varphi dz$ ist (siehe Vorlesung)!
Berechnen Sie jetzt analog die Funktionaldeterminante für den Übergang von Zylinderkoordinaten nach kartesischen Koordinaten:

$$\frac{\partial(\rho,\varphi,z)}{\partial(x,y,z)} \, ,$$

und zeigen Sie, dass

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,z)} \cdot \frac{\partial(\rho,\varphi,z)}{\partial(x,y,z)} = 1 \quad !$$

Hinweis: Leiten Sie die Transformationsformeln für die inverse Transformation ab, $\rho = \rho(x,y,z)$, $\varphi = \varphi(x,y,z)$, $z = z(x,y,z)$, und nutzen Sie aus, dass

$$\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2} \, .$$

b) (1 Punkt) Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften der Funktionaldeterminante:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = -\frac{\partial(y,x,z)}{\partial(u,v,w)} = \frac{\partial(y,x,z)}{\partial(u,w,v)} \quad , \qquad \frac{\partial(x,x,z)}{\partial(u,v,w)} = 0 \, !$$

Aufgabe 3 — Volumenintegrale
a) (2 Punkte) Berechnen Sie das Volumen einer Kugel mit Radius R mit Hilfe von Kugelkoordinaten (r,ϑ,φ)!

b) (1 Punkt) Gegeben ist eine Ladungsverteilung mit Ladungsdichte

$$\begin{aligned} \rho(\boldsymbol{r}) &= \frac{\alpha}{r} \quad \text{falls } r \leqslant r_0 \\ \rho(\boldsymbol{r}) &= 0 \quad \text{sonst} \, , \end{aligned}$$

wobei $r_0 > 0$ und α vorgegebene Konstanten sind. Berechnen Sie die Gesamtladung Q im ganzen Raum in Abhängigkeit von diesen Konstanten, und benutzen Sie dazu Kugelkoordinaten!