

# Hinweise

## zum Physikalischen Praktikum I & II

## für Studierende der Naturwissenschaften

Institut für Quantenphysik

Universität Hamburg

[physikalisches-praktikum.physik@uni-hamburg.de](mailto:physikalisches-praktikum.physik@uni-hamburg.de)

Version 1.5.0

### Inhaltsverzeichnis

|                                                            |           |
|------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1. Einleitung</b>                                       | <b>1</b>  |
| <b>2. Ablauf</b>                                           | <b>2</b>  |
| 2.1. Orte der Versuche am Albert-Einstein-Ring 8 . . . . . | 3         |
| 2.2. Vorbereitung auf das Praktikum . . . . .              | 4         |
| 2.3. Durchführung der Versuche . . . . .                   | 4         |
| 2.4. Offene Experimente . . . . .                          | 5         |
| 2.5. Zeitaufwand in der Blockveranstaltung . . . . .       | 6         |
| 2.6. Verhinderung und Abmeldung . . . . .                  | 6         |
| 2.7. Hausordnung . . . . .                                 | 6         |
| <b>3. Vorbereitung</b>                                     | <b>7</b>  |
| 3.1. Inhaltliche Vorbereitung . . . . .                    | 7         |
| 3.2. Schriftliche Vorbereitung auf die Versuche . . . . .  | 7         |
| 3.3. Online-Vorbereitung . . . . .                         | 8         |
| <b>4. Fehlerrechnung</b>                                   | <b>9</b>  |
| 4.1. Einleitung und Gaußverteilung . . . . .               | 9         |
| 4.2. Poisson-Verteilung . . . . .                          | 11        |
| 4.3. Mittelwert und Standardabweichung . . . . .           | 12        |
| 4.4. Fehlerfortpflanzungsgesetz . . . . .                  | 14        |
| 4.5. Lineare Regression . . . . .                          | 17        |
| 4.6. Weitere Hinweise zur Fehlerrechnung . . . . .         | 22        |
| <b>5. Protokoll</b>                                        | <b>23</b> |
| 5.1. Protokollaufbau . . . . .                             | 23        |
| 5.2. Tabellen . . . . .                                    | 25        |
| 5.3. Abbildungen . . . . .                                 | 26        |
| 5.4. Gleichungen . . . . .                                 | 29        |
| 5.5. Fehlerrechnung . . . . .                              | 29        |
| 5.6. Regressionsrechnung . . . . .                         | 29        |
| 5.7. Ergebnisse . . . . .                                  | 29        |

|                                                                  |           |
|------------------------------------------------------------------|-----------|
| 5.8. Messwerte . . . . .                                         | 30        |
| 5.9. Runden nach DIN 1333 . . . . .                              | 34        |
| <b>6. Checkliste</b>                                             | <b>36</b> |
| <b>A. Bedienung von Oszilloskop und Frequenzgenerator</b>        | <b>38</b> |
| A.1. Oszilloskop Tektronix TDS 2002B . . . . .                   | 38        |
| A.1.1. Bildschirmdarstellung . . . . .                           | 39        |
| A.1.2. Steuerung der Zeitbasis („Horizontal Position“) . . . . . | 40        |
| A.1.3. Steuerung der Y-Achse („Vertical Position“) . . . . .     | 41        |
| A.1.4. Steuerung des Triggers . . . . .                          | 41        |
| A.1.5. Hilfsmittel . . . . .                                     | 42        |
| A.2. Funktionsgenerator Hameg HM 8030 . . . . .                  | 43        |
| <b>B. Literatur</b>                                              | <b>44</b> |
| <b>C. Verbesserungsvorschläge</b>                                | <b>45</b> |
| <b>D. Änderungsprotokoll</b>                                     | <b>46</b> |

# 1. Einleitung

Sie haben sich für ein Studium der Physik entschieden, weil Sie sich, vielleicht wie Goethes Faust, dafür interessieren was die Welt im Innersten zusammen hält. Wie auch Faust werden wir darauf vielleicht niemals eine definitive Antwort erhalten, aber als Physiker\*innen möchten wir unsere Theorien und Modelle immer weiterentwickeln und verbessern. Wir wollen sie falsifizieren, also durch Experimente widerlegen, um dann neue, bessere Modelle zu erschaffen, bis der Zyklus schließlich wieder von vorne beginnt.

Es ist also grundlegend, dass man als Physiker\*in immer daran arbeitet, alles, wirklich alles, kritisch zu hinterfragen. Das gilt nicht nur für die Modelle und Theorien, sondern auch die Versuchsaufbauten und Messinstrumente. Im Praktikum sollen Sie die Grundlagen der Experimentellen Physik verstehen. Sie lernen selbst Experimente durchzuführen und Messwerte so aufzunehmen, dass man sie anschließend sinnvoll auswerten kann. Essentiell hierfür ist auch das Verständnis für Fehlerquellen und Messwertabweichungen, welches für die Deutung und Interpretation von Messwerten/Experimenten/Ergebnissen unerlässlich ist. Denn nur, wenn man versteht, ob Messwerte aussagekräftig genug als Beleg oder als Gegenbeweis für eine Theorie genutzt werden können, kann man wirklich wissenschaftlich arbeiten.

Hinterfragen Sie nicht nur die Messinstrumente und Versuchsaufbauten, sondern auch die Deutungsmuster. 1962 prägte Thomas S. Kuhn den Begriff des Paradigmenwechsels und beschrieb die Struktur wissenschaftlicher Revolutionen. Wenn man sich z. B. die Geschichte der Quantenphysik ansieht, kann man ein wissenschaftliches Paradigma beobachten. Selbst Koryphäen denen man wirklich kein mangelndes Verständnis des Fachgebiets unterstellen kann, sind dafür anfällig, wie ein berühmtes Zitat von Albert Einstein belegt: „Gott würfelt nicht!“ Die neuen Experimente widersprachen dem klassischen Modell, nach dem Messergebnisse einem Determinismus unterworfen seien. Erst als immer mehr Experimente diesem Modell widersprachen und es nicht mehr zu leugnen war, dass die alte Denkweise nicht mehr funktioniert, wurde das klassische Paradigma verworfen. Diese Prozesse gab es in allen Fachrichtungen. Die Chemie hatte z. B. das Phlogiston, bis man die Rolle des Sauerstoffs bei Verbrennungsvorgängen näher zu untersuchen begann. Im Gegensatz zu den Naturwissenschaften, die meistens monoparadigmatisch sind, sind andere Disziplinen multiparadigmatisch<sup>1</sup>.

Einigen von Ihnen hat der Hut vor dem Studium wahrscheinlich „theoretische Physik“ zugerufen. Versuchen Sie dennoch die Erfahrung aus dem Praktikum dazu zu verwenden, in Ihrem späteren Arbeitsumfeld ein Verständnis für die experimentelle Seite der Physik mitzunehmen. Ein gegenseitiges Verständnis hilft dabei, gemeinsam bessere Theorien und Modelle aufzustellen.

**Und nun herzlich Willkommen im Physikalischen Praktikum für Studierende der Naturwissenschaften! Diese Hinweise sollen Ihnen einen Überblick über den Ablauf und Regeln, die Anforderungen und einige inhaltliche Thematiken geben.**

---

<sup>1</sup> <https://www.praefaktisch.de/100-jahre-kuhn-und-lakatos/multiparadigmatizitaet-in-den-wissenschaften/>, abgerufen am 18.12.2023

## 2. Ablauf

Das Praktikum findet in jedem Semester zweimal statt, einmal semesterbegleitend und einmal als Blockveranstaltung in der vorlesungsfreien Zeit. Jeder Praktikumskurs besteht aus 13 Veranstaltungen (entspricht 5 Semesterwochenstunden).

Im Praktikum I absolvieren Sie zunächst drei Einführungstermine. Dort lernen Sie die Grundlagen des wissenschaftlichen Arbeitens kennen. Außerdem üben Sie das Verfassen von Protokollen, das Plotten von Messdaten, den Umgang mit Python sowie die korrekte Durchführung von Experimenten. Anschließend führen Sie neun Versuche aus verschiedenen Bereichen der Physik durch. In Praktikum II führen Sie 11 Versuche an 12 Terminen durch.

Einen Spezialfall im Ablauf stellt die Blockveranstaltung des Sommersemesters für Praktikum II dar. Aufgrund der Menge an Studierenden wird hier ein zusätzlicher Kurs, Kurs 7, angeboten. Dieser startet eine Woche vor den beiden anderen Kursen. Kurs 7 findet in der ersten Woche montags, mittwochs und freitags statt und in den darauffolgenden Wochen immer mittwochs. Sie haben in der ersten Woche also eine etwas höhere Belastung, in den folgenden Wochen dafür eine etwas niedrigere. In der ersten Woche hat Kurs 7 zudem angepasste Fristen für die Protokollabgabe. Siehe dazu Abschnitt 2.3.

In der Auftaktveranstaltung erhalten Sie Ihren Testatzettel mit Ihrer persönlichen Registrierungsnummer. Diese Registrierungsnummer setzt sich aus sechs Ziffern zusammen. Die ersten zwei stehen für die aktuelle Praktikumsperiode (letzte Ziffer des Jahres und 1-4 für die jeweilige Praktikumsveranstaltung, semesterbegleitend oder Block), gefolgt von Kursnummer und Praktikum (1 oder 2). Abschließend folgt Ihre zweistellige laufende Nummer.

Die letzten vier Ziffern bestimmen die Reihenfolge, in welcher Sie die Praktikumsversuche durchlaufen (siehe Rückseite Testatzettel). Anschließend durchlaufen Sie in Praktikum 1 die Versuche in aufsteigender Reihenfolge, wobei auf Versuch 12 Versuch 1 folgt. Die Versuche finden im Erdgeschoss und dem 1. Obergeschoss im Albert-Einstein-Ring 8 in der Nähe des DESY-Geländes<sup>2</sup> in Bahrenfeld statt.

Zudem erhalten Sie in der Auftaktveranstaltung den Zugangscode zum Moodle-Onlinekurs des entsprechenden Praktikums, worüber Sie auch Ihre Protokolle einreichen. Genauere Informationen finden Sie in Abschnitt 3.3.

---

<sup>2</sup><https://www.openstreetmap.org/?mlat=53.57539&mlon=9.88866#map=19/53.57539/9.88866>

## 2.1. Orte der Versuche am Albert-Einstein-Ring 8

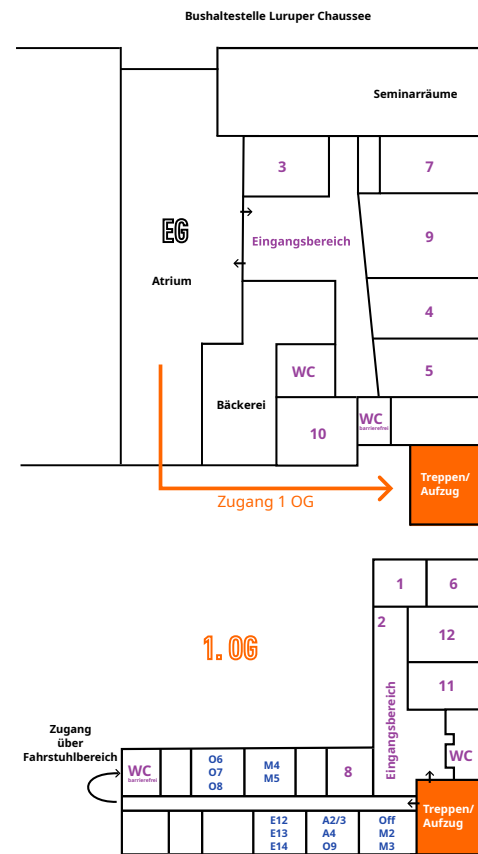
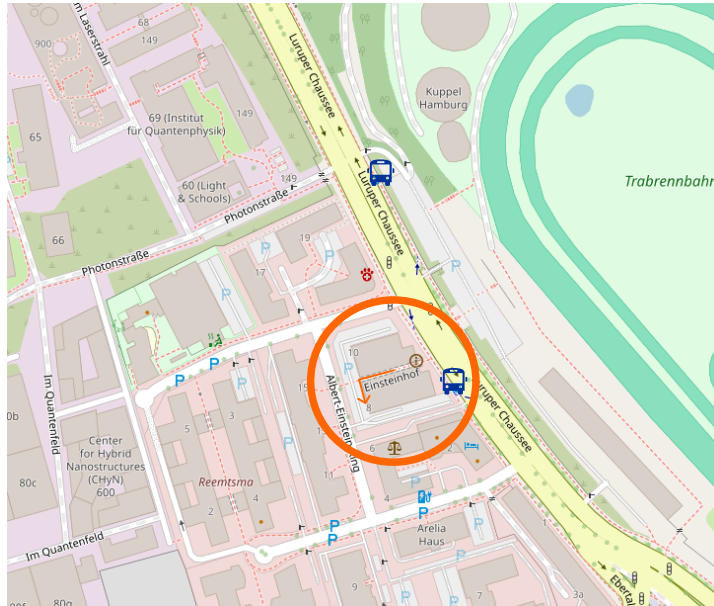


Abbildung 2.1: Räume der Versuche. *Lila Nummern: Praktikum I, dunkelblaue Nummern: Praktikum II.*  
 OpenStreetMap Karte abgerufen am 6.10.2025 © OpenStreetMap contributors. Hervorhebung der Bushaltestellen.

## 2.2. Vorbereitung auf das Praktikum

Rechtzeitig vor Beginn des Praktikums müssen Sie einige – zeitaufwändige! – Vorbereitungen treffen. Beginnen Sie also so früh wie möglich. Nicht alle Versuchsthemen werden in den Physikvorlesungen des ersten Semesters behandelt, und die Praktikumsinhalte sind mit den Vorlesungsinhalten auch nicht deckungsgleich. Daher ist es nötig, dass Sie sich mithilfe der Versuchsanleitungen, mit Fachliteratur (siehe Kapitel B), sowie den Lerninhalten im Onlinekurs weitere Grundlagen aneignen.

Zusätzlich fertigen Sie zu den jeweiligen Versuchen eine schriftliche Vorbereitung an. Diese schreiben Sie in Ihr Protokoll (vor das später anzufertigende Protokoll). In Abschnitt 3.2 werden die Anforderungen an diese schriftliche Vorbereitung aufgeführt. Auch diese schriftliche Vorbereitung sollten Sie bereits vor Beginn des Praktikums anfertigen. Zu den offenen Experimenten bereiten Sie sich mit dem Onlinekurs vor.

## 2.3. Durchführung der Versuche

Wenn Sie Praktikum I als Blockveranstaltung in der vorlesungsfreien Zeit absolvieren, so finden die 12 Versuche im Verlauf von nur drei Wochen an sechs Tagen statt. Pro Praktikumstag führen Sie also zwei Versuche durch, von 9 Uhr bis 13 Uhr, sowie von 14 Uhr bis 18 Uhr. Beim semesterbegleitenden Praktikum hingegen wird an einem festen Wochentag (Dienstag oder Donnerstag) nachmittags von 14 Uhr bis 18 Uhr jeweils ein Versuch durchgeführt. Die genauen Termine entnehmen Sie der Terminliste und Ihrem Testatblatt. Im Praktikum I sind Sie in festen Zweierteams in Gruppen von maximal acht Personen eingeteilt, die die Versuche in der jeweiligen Reihenfolge durchführen.

Zu Beginn jeder Praktikumsveranstaltung wird geprüft, ob Sie anwesend sind: Alle Teilnehmenden müssen pünktlich zum angekündigten Beginn der Veranstaltung anwesend sein. Bei einer Verspätung von mehr als 15 Minuten darf ein Versuch nicht mehr begonnen werden.

Bei Experimenten, die nach einem vorgegebenen Ablaufplan (siehe Anleitung) durchgeführt werden, gibt es zu Beginn jeweils eine Vorbesprechung. In dieser wird **per Zufall** entschieden, welche Person den Versuch vorstellen muss. Die schriftliche Vorbereitung zum Versuch muss zudem **vor Beginn** des Versuchs in Moodle vorliegen und Fragen zu den Grundlagen des Versuches beantworten. Auch können und sollen Sie in der Vorbesprechung Ihre Fragen zum Versuch stellen, so dass Unklarheiten aufgeklärt werden können. Anschließend gibt es eine Einweisung in die Geräte und bei einigen Versuchen eine Sicherheitsbelehrung.

Hören Sie hierbei aufmerksam zu; für Beschädigungen von Apparaten, die durch Missachtung der Vorschriften entstehen, haften Sie selbst! Im Anschluss führen Sie gemeinsam den Versuch in eigenständiger Arbeit durch und nehmen gemäß den Anleitungen Ihre Messreihen auf. Wenn Sie einen Versuchsaufbau selbst aufbauen, lassen Sie diesen vor Inbetriebnahme prüfen!

Manche Versuche sind zweiteilig. In diesem Fall tauschen Sie nach der Hälfte der Experimentierzeit den Arbeitsplatz mit zwei anderen Studierenden. Nach Abschluss des Versuchs räumen Sie Ihren Arbeitsplatz auf und bauen eventuelle Aufbauten wieder ab, um den Arbeitsplatz für die nächste Gruppe vorzubereiten.

Sie führen zu zweit ein gemeinsames **Laborbuch**, in welches Sie Details zum Versuchsaufbau, alle Messdaten, Beobachtungen und Bemerkungen eintragen. Eine Kopie des unterschriebenen Messprotokolls muss im Anhang des Protokolls eingefügt werden. Wir empfehlen die Verwendung eines karierten Heftes.

Die korrekte Durchführung der Messungen und die Ausarbeitung des Protokolls wird von den Lehrenden durch Vor-, Zwischen- und Endtestate bestätigt. Wenn Sie am Ende eines Versuchstermins Ihr Testatblatt und Ihr Laborbuch mit den Messdaten vorlegen, prüft der/die Lehrende Ihre Messergebnisse auf Vollständigkeit und Plausibilität. Wenn keine wesentlichen Mängel an der schriftlichen Vorbereitung festgestellt werden, und wenn Ihre Messdaten vollständig und formal korrekt aufgeschrieben sind, und wenn Sie Ihren Experimentierplatz aufgeräumt haben, so erhalten Sie ein **Vortestat** in Form einer Unterschrift (Kürzel) auf den Testatblatt und unter Ihren Messwerten.

Auf den Versuchstag folgen einige Tage (im Blockpraktikum nur wenige!), in denen Sie Zeit haben, um das Protokoll zum Versuch gemeinsam auszuarbeiten. Im Protokoll werden außer den Messdaten Versuchsaufbau, Ablauf und Auswertung festgehalten. Damit stellt das Protokoll die Dokumentation des Versuchs dar. In Abschnitt 5 wird detailliert erläutert, wie das Protokoll ausgearbeitet werden soll. Das vollständig ausgearbeitete Versuchsprotokoll wird bis zum nächsten Versuchstag in Moodle abgegeben. Eine Ausnahme hier bildet Praktikum 2, Kurs 7, bei dem in der ersten Woche 6 Versuche durchgeführt werden. Hier gelten folgende Abgabefristen: Mo → Fr, Mi → Mo der zweiten Woche, Fr → Mi der zweiten Woche.

Bei zufriedenstellender Ausarbeitung des Versuchs, erhalten Sie das **Endtestat**, ebenfalls als Unterschriftskürzel auf dem Testatblatt. Mit Erhalt des Endtestats ist der Versuch abgeschlossen. Gibt es wesentliche Mängel oder Fehler in der Ausarbeitung, so erhalten Sie das Protokoll mit einem **Zwischentestat** sowie Korrekturhinweisen zur Verbesserung zurück. Die verbesserte Version des Protokolls laden Sie bis zum darauffolgenden Versuchstag im Zweitabgabebereich auf Moodle hoch. Für jeden Versuch werden maximal zwei Zwischentestate erteilt. Werden auch nach der dritten Abgabe noch gravierende Fehler oder Mängel festgestellt, wird kein Endtestat vergeben und der Versuch muss wiederholt werden. Auch wenn Sie versäumen, ein Protokoll rechtzeitig hochzuladen, wird ein Zwischentestat ausgestellt. Dies bedeutet, dass ein Versuch bei mehr als zwei Versäumnissen ebenfalls wiederholt werden muss. Achten Sie darauf, alle Testate auf dem Testatblatt zu erhalten! Protokolle mit fehlendem Vortestat können kein Endtestat erhalten!

Der letzte Veranstaltungstag des Praktikums dient als Abschlusstag. An diesem werden die letzten Protokolle kontrolliert, von Ihnen korrigiert, und ggf. testiert. Zudem kann am Abschlusstag ein ggf. nicht erfolgreich abgeschlossener Versuch wiederholt werden. Fehlen nach dem Ende des Abschlusstages Testate, so wird das Praktikum nicht anerkannt und muss wiederholt werden — es sei denn, es wird mit expliziter Zustimmung der Praktikumsleitung, etwas Anderes konkret mit Ihnen vereinbart. Sind alle benötigten Testate vorhanden, so haben Sie das Praktikum bestanden, was anschließend bei STiNE eingetragen wird.

## 2.4. Offene Experimente

Das offene Experiment stellt eine besondere Form des Versuchs dar. Der Ablauf unterscheidet sich wesentlich von dem klassischer, nach einer Versuchsanleitung durchgeführter, Experimente. In Praktikum I werden aktuell drei Versuche als **Offene Experimente** durchgeführt.

Beim Offenen Experimentieren in Praktikum I werden jeweils 2 Teams aus maximal 4 Studierenden gebildet. Jedes Team bearbeitet eine andere Aufgabe. Es geht darum, dass Sie im Team eigenständig, in einer flexiblen Versuchsumgebung aber ohne konkret vorgegebenen Versuchsaufbau, anhand der jeweils ausgewählten, Ihnen vorher nicht konkret bekannten Fragestellung einen Versuch entwerfen, durchführen und auswerten. *Bei jeder Aufgabenstellung gibt es verschiedene Lösungsmöglichkeiten* — finden Sie die Ihre! Nachdem Sie im Team Ihren eigenen Versuchsentwurf geplant und ggf. auch schon getestet haben, stellen die Teams einander ihre Entwürfe vor. Sie hinterfragen den Entwurf des anderen Teams und spüren Verbesserungsmöglichkeiten auf. Daran schließen sich die eigentliche Durchführung des Versuchs und eine Schnellauswertung an.

Der Versuchstermin endet mit einem zweiten Kolloquium; dort zeigen die Teams einander ihre Ergebnisse und diskutieren sie. In den Tagen nach dem Offenen Experiment treffen Sie sich mit dem ganzen Team zur gemeinschaftlichen Ausarbeitung des Protokolls.

Genaueres zum Ablauf der Offenen Experimente und zu ihrer Vorbereitung finden Sie im Onlinekurs zum Praktikum auf der Lernplattform Moodle. Die Onlinevorbereitung beinhaltet einführende und vertiefende Texte, Videos, Beispielaufgaben und Tests. Sie bereitet auf die Fehlerrechnung, auf das offene Experimentieren an sich sowie auf die physikalischen und technischen Grundlagen der jeweiligen offenen Experimente vor und wird jeweils mit einem Test zum jeweiligen Offenen Experiment abgeschlossen. Auch hier empfehlen wir dringend, mit der Vorbereitung so früh wie möglich zu beginnen!

## 2.5. Zeitaufwand in der Blockveranstaltung

Das Praktikum als Blockveranstaltung umfasst drei Wochen (plus Abschlusstag). Da in dieser Veranstaltungsform sehr viel Inhalt in kürzester Zeit erarbeitet werden muss, ist der Zeitplan sehr straff! **Stellen Sie sich daher auf eine erhöhte zeitliche Belastung ein!** Die Ausarbeitung eines Protokolls ist eine aufwändige Aufgabe und kann durchaus sechs bis acht Stunden oder mehr in Anspruch nehmen. Daher wird in der Blockveranstaltung ein großer Teil der Zeit zwischen den Versuchstagen auf die Ausarbeitung und Verbesserung der Protokolle entfallen. Sollte eine derartige Belastung für Sie schwierig sein, empfiehlt es sich, das Praktikum semesterbegleitend zu absolvieren. Bitte beachten Sie jedoch, dass eine Abmeldung vom Praktikum nach bereits erfolgter Anmeldung zeitnah erfolgen muss.

## 2.6. Verhinderung und Abmeldung

Sollten Sie Ihren Praktikumsplatz nicht antreten können, so teilen Sie dies der Praktikumsleitung unter der auf der Veranstaltungsterminliste angegebenen Telefonnummer oder per E-Mail ([physikalisches-praktikum.physik@uni-hamburg.de](mailto:physikalisches-praktikum.physik@uni-hamburg.de)) bitte unbedingt so früh wie möglich mit. Ggf. kann Ihr Praktikumsplatz dann neu vergeben werden. Auch bei Krankheit oder anderer kurzfristig auftretender Verhinderung ist eine Benachrichtigung **vor Beginn** des Praktikumstages nötig. Im Falle einer Erkrankung müssen Sie diese mit einem ärztlichen Attest nachweisen. Wenn Sie sich nicht rechtzeitig abmelden oder die erforderlichen Nachweis nicht erbringen, so kann es sein, dass Sie das Praktikum wiederholen müssen.

## 2.7. Hausordnung

- Rauchen ist im gesamten Gebäude nicht erlaubt.
- Bitte nutzen Sie die Aufenthaltsbereiche um zu Essen oder zu Trinken

### 3. Vorbereitung

Bereiten Sie sich vor Praktikumsbeginn gut vor, damit Sie im Praktikum gut zurechtkommen. Im Folgenden finden Sie Informationen, was Sie vor Beginn des Praktikums vorbereiten sollen. Damit Ihnen das Experimentieren im Praktikum auch Spaß macht, **beginnen Sie mit den Vorbereitungen bitte so früh wie möglich**, denn sie sind zeitaufwändig.

#### 3.1. Inhaltliche Vorbereitung

Im Praktikum werden Versuche aus verschiedenen Themenbereichen der Physik absolviert. Es ist daher wahrscheinlich, dass einige Themen zum Zeitpunkt des Praktikums noch nicht in der Vorlesung behandelt wurden. Sollten Sie das Praktikum I wie im Studienplan vorgesehen im ersten Semester absolvieren, so wurden beispielsweise die Themen Elektrodynamik und Optik noch nicht bearbeitet. Darüber hinaus gibt es Praktikumsinhalte, die über die Vorlesungsinhalte hinausgehen. Auch darum ist es nötig, dass Sie sich inhaltlich auf die Versuche konkret vorbereiten. Sie können die Themen der Versuche dem Anleitungsheft entnehmen. Auch die Ihnen bereits bekannten Themen sollten Sie im Praktikum sicher beherrschen und bei Bedarf wiederholen, damit Sie bei allen Versuchen verstehen, was physikalisch geschieht.

Für ein gutes Verständnis der Themen genügt es nicht, die Anleitungen oder in Praktikum II das Anleitungsheft zu lesen. Bitte eignen Sie sich das erforderliche Grundlagenwissen zusätzlich mithilfe von Fachliteratur (siehe Abs. B) und bei den offenen Experimenten mithilfe des Onlinekurses an. Fachliteratur wird auch für das Verfassen der schriftlichen Vorbereitung benötigt. Sie können sich für die Vorbereitung an den Themen zur Vorbereitung, die vor jedem Versuch im Anleitungsheft notiert sind, orientieren. Ob Sie sich ausreichend auf die Versuche vorbereitet haben, wird zu Beginn der jeweiligen Praktikumsveranstaltung überprüft. Bei einer nicht ausreichenden Vorbereitung darf ein Versuch nicht begonnen werden.

#### 3.2. Schriftliche Vorbereitung auf die Versuche

Zusätzlich zur inhaltlichen Vorbereitung ist bei den angeleiteten (nicht offenen) Experimenten erforderlich, dass Sie diese Vorbereitung auch schriftlich festhalten. Dies geschieht in der Form von 2-3 Seiten Vorbereitungstext zu Beginn eines jeden Protokolls. Da jedes Protokoll ein eigenständiges Dokument darstellt, soll es möglich sein, einen darin beschriebenen Versuch ohne zusätzliche Lektüre zu verstehen. Die schriftliche Vorbereitung dient daher als eine allgemeine Einführung in das Thema des Versuchs und soll einem Leser eben jenes Vorwissen vermitteln, dass Sie sich zu dem Versuch angeeignet haben. Die Vorbereitung besteht aus einer kurzen Darstellung der Grundlagen, inklusive Begriffserklärungen und Erläuterungen der relevanten physikalischen Phänomene. Sollten Sie für die Auswertung des Versuchs Formeln benötigen, die sich aus anderen grundlegenden Formeln ableiten, so sollte auch eine Herleitung dieser Formeln in der Vorbereitung vorkommen.

Es sollen für die schriftliche Vorbereitung keinesfalls Buchtexte, Internetartikel oder gar die Versuchsanleitung einfach abgeschrieben werden. Verwenden Sie aus Ihrem Verständnis heraus Ihre eigenen Worte! Auch die schriftliche Vorbereitung wird überprüft.

Für die offenen Experimente entfällt die schriftliche Vorbereitung.

Die schriftliche Vorbereitung laden Sie **vor dem Versuch** im entsprechenden Bereich in Moodle hoch.

### 3.3. Online-Vorbereitung

Für die Vorbereitung auf das Praktikum I stellen wir Ihnen einen Onlinekurs auf Moodle zur Verfügung. Den Einschreibeschlüssel dafür erhalten Sie bei der Auftaktveranstaltung. Falls Sie mit dem Zugang Schwierigkeiten haben, wenden Sie sich bitte an das Praktikumsteam unter [physikalisches-praktikum.physik@uni-hamburg.de](mailto:physikalisches-praktikum.physik@uni-hamburg.de). Der Onlinekurs bietet Informationen zum Offenen Experimentieren, zu den physikalischen Themen der Offenen Experimente (Luftkissenschiene, Optik und elektrische Schaltungen) sowie zur Fehlerrechnung (inklusive Beispielaufgaben und Übungen).

Beginnen Sie mit der Arbeit im Onlinekurs so früh wie möglich. Schließen Sie mit dem Kurs Ihre Wissenslücken, damit Ihnen für die Fehlerrechnung und für die Offenen Experimente das erforderliche Handwerkszeug zur Verfügung steht.

Da die Fehlerrechnung erfahrungsgemäß für viele Studierende ein neues und schwieriges Thema darstellt, planen Sie dafür bitte ausreichend Zeit ein. Die Durchführung der Minutests ist Teil des Praktikums und wird von den Lehrenden am ersten Praktikumstag überprüft und testiert. Ohne die Durchführung kann das Praktikum nicht abgeschlossen werden.

Sehen Sie sich weiter die allgemeinen Informationen und Videos zum Offenen Experimentieren an. Anschließend erkunden Sie die physikalischen und technischen Informationen zu den jeweiligen Offenen Experimenten. Manche Themen sind auch hilfreich für andere Versuche, z. B. ist das Optik-Thema „Dünne Linsen“ auch für Versuch 6 – Prismenspektroskopie hilfreich, das Elektrizitätsthema „Magnetismus“ betrifft auch die Versuche 9 und 10, und viele Elektrizitätsthemen sind auch relevant für Versuch 11 – Elektrische Schwingungen.

Zu jedem Thema, das das jeweilige Offene Experiment betrifft, wird ein Überblicksartikel angeboten. Zu vielen Themen gibt es Vertiefungen, Übungsaufgaben, Minutests mit Rückmeldung oder Videos. Ob Sie sich ausreichend vorbereitet haben, prüfen Sie im Kurs selbst für jedes offene Experiment mit Hilfe eines größeren Tests. Wenn Sie den jeweiligen Test nicht bestehen, sollen Sie sich im Kurs weiter mit den Themen beschäftigen, die Sie im Test überforderten. Anschließend sollen Sie den Test wiederholen, wobei Ihnen überwiegend andere, aber inhaltlich ähnliche, Fragen gestellt werden als beim vorigen Mal. Wenn Sie den Test immer noch nicht bestehen, lernen Sie weiter und können anschließend erneut versuchen, den Test zu bestehen, usw. Ein positives Testergebnis ist erforderlich, und die Lehrenden prüfen vor Beginn des jeweiligen offenen Experiments, ob dieses vorliegt.

## 4. Fehlerrechnung

Der folgende Text ist eine sehr ausführliche und mathematische Darstellung der Fehlerrechnung. Auf Moodle finden Sie eine kondensierte Version für den Einstieg.

### 4.1. Einleitung und Gaußverteilung

Das Ergebnis einer Messung ist der Zahlenwert (*Messwert*) einer physikalischen Größe (*Messgröße*). Bei einem direkten Messverfahren stellt dies unmittelbar auch gleich das endgültige Messergebnis dar, während dieses bei indirekten Verfahren erst aus einem oder mehreren Messwerten unterschiedlicher physikalischer Größen mit Hilfe eindeutiger mathematischer Beziehungen ermittelt wird.

Da ein reales Messverfahren niemals vollkommen sein kann, ist stets anzunehmen, dass der Messwert  $x$  nicht mit dem wahren Wert  $x_0$  übereinstimmt. Die Abweichungen eines Messwertes vom wahren Wert  $x - x_0$  bezeichnet man als *absoluten Fehler*. Teilt man den absoluten Fehler durch den wahren Wert erhält man den *relativen Fehler*.  $(x - x_0)/x_0$  Damit aber das Messen von Größen überhaupt einen Sinn hat, muss es zumindest möglich sein, die Grenzen eines Intervalls  $(x - \Delta x, x + \Delta x)$  zu bestimmen, in dem der wahre Wert  $x_0$  der Messgröße  $x$  mit genügend großer Wahrscheinlichkeit liegt. Dies ist Aufgabe der Theorie der Fehlerbestimmung. Darüber hinaus liefert sie aber auch Methoden, um das Messverfahren und seine Auswertung dahingehend zu optimieren, dass die Abweichung des Messergebnisses vom wahren Wert möglichst gering wird.

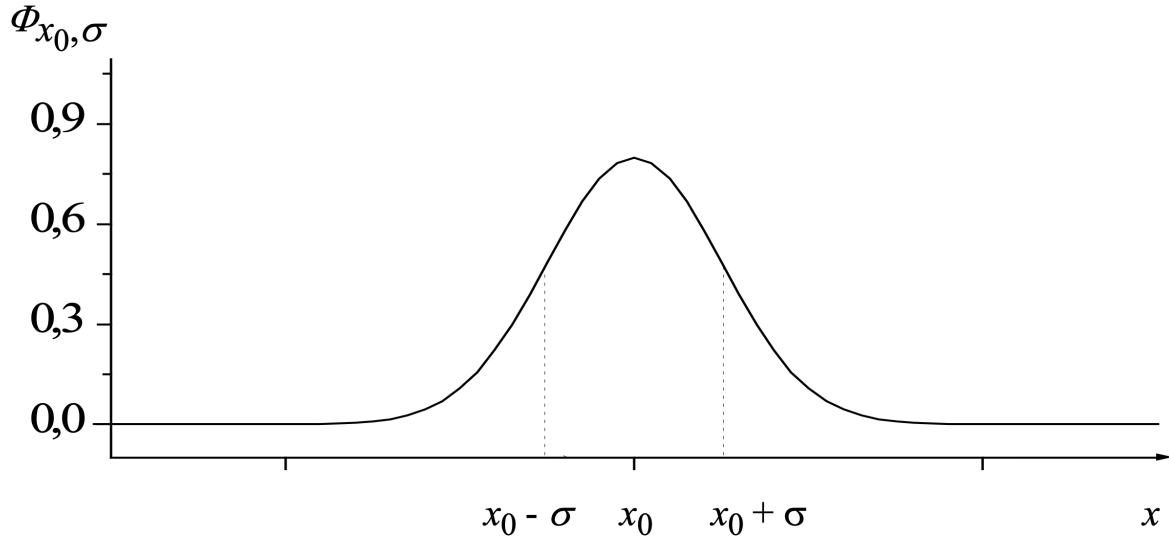
Die Abweichungen vom wahren Wert lassen sich in zwei große Gruppen einteilen: systematische und zufällige Fehler.

Ein *systematischer Fehler* bleibt bei Wiederholung der Messung unter konstant gehaltenen Bedingungen unveränderlich, liefert also jedes Mal denselben Beitrag zur Abweichung vom wahren Wert, während *statistische Fehler* an einer zufälligen Streuung der Messergebnisse zu erkennen sind.

Systematische Abweichungen sind darin begründet, dass die experimentellen Verhältnisse anders als vom Experimentator angenommen oder unbekannt sind. Ursachen dafür können u.a. sein: fehlerhafte Eichung eines Messinstruments, vom Sollwert abweichende Temperatur des Messobjekts (z. B. bei einem elektrischen Leiter mit Widerstand), nicht berücksichtigte Störfelder im Raum (z. B. Erdmagnetfeld), gleichbleibende Fehler bei der Beobachtung (z. B. durch Parallaxe).

Systematischen Abweichungen sind oft schwer zu erkennen. Ein allgemeines Verfahren zu deren Erfassung gibt es nicht. Da sie von der spezifischen Messanordnung abhängen, ist es oft von Nutzen, dieselbe Größe auch mit einem anderen Verfahren zu bestimmen. Das Messverfahren ist immer so zu wählen, dass mögliche Nebeneinflüsse klein sind. Wenn eine systematische Abweichung erfassbar ist, sollte nach Möglichkeit ihre Ursache beseitigt bzw. das Messergebnis entsprechend korrigiert werden. **Die Aufzählung und Abschätzung der systematischen Fehlerquellen gehört unbedingt ins Protokoll!**

Statistische Fehler haben ihre Ursache darin, dass während der Messung auch bei konstant gehaltenen Bedingungen unbeeinflussbare statistische Schwankungen bei dem Messobjekt, der Messapparatur und dem Beobachter auftreten. Wird die Messung einer bestimmten Größe  $x$ , die mit keinem systematischen Fehler behaftet ist, mehrmals durchgeführt, so zeigt sich, dass die Messergebnisse in der Umgebung des wahren Wertes  $x_0$  am dichtesten liegen, d.h. kleine Abweichungen von  $x_0$  kommen häufiger vor als große. Trägt man die Häufigkeit, mit der ein Messwert auftritt, über den Messwerten auf, so ergibt sich bei vielen Beobachtungen eine Verteilung, die man Fehlerkurve nennt. Die normierte Fehlerkurve gibt die Wahrscheinlichkeit an, einen beliebigen Messwert in einem bestimmten Intervall  $[a, b]$  zu finden.



**Abbildung 4.1:** Gauß-Verteilung mit Erwartungswert  $x_0$  und Standardabweichung  $\sigma$ .

Erst mit ihrer Kenntnis lässt sich die erwartete Abweichung eines Wertes vom Mittelwert angeben, weshalb die Verteilungsfunktion extrem wichtig ist. Zu den wichtigsten Verteilungen gehört die *Normal-* oder *Gauß-Verteilung*

$$\Phi_{x_0, \sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x - x_0)^2}{\sigma^2}\right). \quad (4.1)$$

Die Gaußverteilung trifft bei fast allen Messvorgängen in der Physik zu. Die Form dieser Funktion ist glockenförmig. Das Maximum liegt bei  $x_0$  und die Wendepunkte der Kurve liegen bei  $x_0 - \sigma$  und  $x_0 + \sigma$ .

Der Erwartungswert  $E_x$  (entspricht dem Mittelwert) einer  $\Phi$ -verteilten Zufallsvariablen  $x$  ist definiert durch

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x\Phi(x)dx. \quad (4.2)$$

Damit erhalten wir für die Normalverteilung  $E_x = x_0$ .

Als *Varianz*  $V_x$  einer Verteilung wird der Wert  $V_x = E_{(x-E_x)^2} = E_{x^2} - E_x^2$  bezeichnet.

Sie ist der „Erwartungswert der quadratischen Abweichung vom Erwartungswert“ (mittlere quadratische Abweichung). Für die Normalverteilung ergibt sich:

$$V_x = \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_0)^2 \Phi(x) dx = \sigma^2. \quad (4.3)$$

Die Wurzel der Varianz wird als *Standardabweichung* oder *Standardfehler*  $\sigma$  bezeichnet. Sie ist ein Maß für die Breite der Wahrscheinlichkeitsverteilung. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Messwert  $x$  im Intervall von  $x_0 - \sigma$  bis  $x_0 + \sigma$  liegt, ist 68,3%. Umgekehrt liegt dann der wahre Wert  $x_0$  mit derselben Wahrscheinlichkeit im Intervall von  $x - \sigma$  bis  $x + \sigma$ . Die Wahrscheinlichkeit, dass der wahre Wert  $x_0$  sich im Intervall von  $x - 2\sigma$  bis  $x + 2\sigma$  befindet, ist 95,4% und im Intervall von  $x - 3\sigma$  bis  $x + 3\sigma$  99,7%. Es gibt kein Intervall, in dem sich der wahre Wert  $x_0$  mit Sicherheit befindet.

## 4.2. Poisson-Verteilung

**Dieser Abschnitt ist für das Praktikum II relevant!**

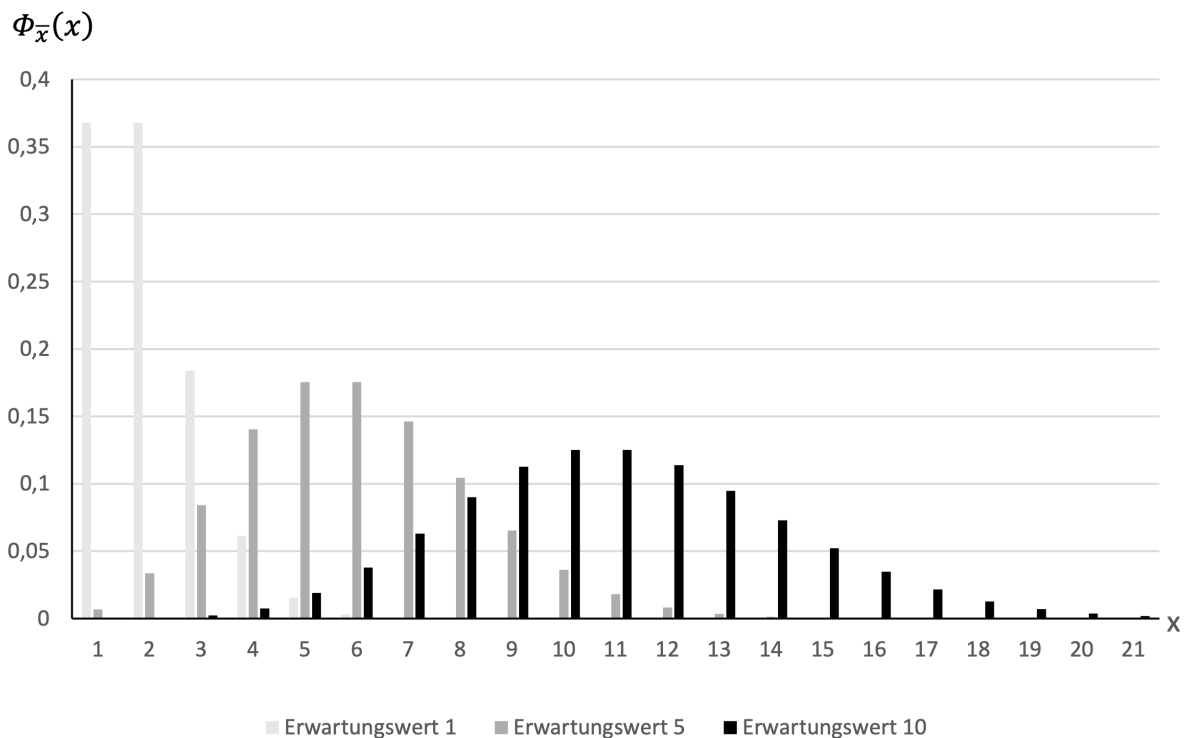
Sie können ihn daher in der Vorbereitung für das Praktikum I überspringen.

Eine Normalverteilung liegt sehr häufig vor, wenn für eine physikalische Größe jeder reelle Wert möglich ist. Bei einem diskreten positiven Messwert tritt die diskrete *Poisson-Verteilung*

$$\Phi_{\bar{x}}(x) = \frac{\bar{x}^x}{x!} e^{-\bar{x}} \quad (4.4)$$

häufig auf. Dabei bezeichnet  $\bar{x} = E_x$  den Erwartungswert der Verteilung. Tatsächlich hängt die Poisson-Verteilung nur vom Erwartungswert  $\bar{x}$  ab. Die Varianz der Poisson-Verteilung ist hierbei identisch mit dem Erwartungswert:

$$V_x = \bar{x} = \sigma^2. \quad (4.5)$$



**Abbildung 4.2:** Poisson-Verteilungen mit Erwartungswerten  $\bar{x}$  von 1, 5 und 10.

Diese zunächst asymmetrische Verteilung wird mit wachsendem  $\bar{x}$  immer symmetrischer und nähert sich dabei einer Gauß-Verteilung mit  $x_0 = \bar{x}$  und  $\sigma = \sqrt{x_0}$  an.

Mathematisch leitet sich die Poisson-Verteilung ab aus der *Binomialverteilung*:

$$\Phi_{p,n}(x) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \quad (4.6)$$

Diese beschreibt die Verteilung von Ereignissen unabhängiger, gleichbleibender Versuche mit nur zwei möglichen Ergebnissen (Ereignis und kein Ereignis), sogenannten Bernoulli-Versuchen. Führt man mehrere solcher Versuche hintereinander oder gleichzeitig aus, so spricht man von einer Bernoulli-Kette. Man bezeichnet hierbei die gleichbleibende Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis eintritt mit  $p$  und die Anzahl der Bernoulli-Versuche, die in der Bernoulli-Kette durchgeführt werden, mit  $n$ . Werden nun sehr viele Bernoulli-Versuche ausgeführt, bei denen die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses sehr gering ist, so geht die Binomialverteilung über in die

Poisson-Verteilung. Mathematisch gesehen stellt die Poisson-Verteilung also den Grenzfall der Binomialverteilung für  $n \rightarrow \infty$  und  $p \rightarrow 0$  dar.

Der Vorteil der Poisson-Verteilung gegenüber der Binomialverteilung liegt darin, dass für die Poisson-Verteilung weder die Anzahl der Versuche  $n$ , noch die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses  $p$  bekannt sein muss. Damit eignet sich die Poisson-Verteilung hervorragend für die Beschreibung der Verteilung seltener Ereignisse: Tritt ein Ereignis für gewöhnlich sehr selten auf, ist aber gleichzeitig die Anzahl der Elemente, bei denen das Ergebnis auftreten kann sehr groß, so bietet sich die Beschreibung durch die Poisson-Verteilung an. Ein gutes Beispiel hierfür ist der radioaktive Kernzerfall. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kern in einer bestimmten Zeitspanne zerfällt, ist sehr gering und schwer zu bestimmen. Da aber häufig sehr große Mengen an Atomen betrachtet werden, kann die Verteilung der Zerfälle pro Zeitintervall durch eine Poisson-Verteilung recht genau beschrieben werden. In diesem Beispiel entspräche dann  $p$  der Zerfallswahrscheinlichkeit pro Zeitintervall,  $n$  der Anzahl der Atome und  $\bar{x}$  dem Erwartungswert der im Zeitraum zerfallenen Kerne.

### 4.3. Mittelwert und Standardabweichung

Die oben dargestellten Verteilungen bekommt man für eine unendlich große Zahl von Messungen. Wir haben jedoch in der Realität eine begrenzte Zahl von Messwerten. Bei  $n$  aufeinanderfolgenden Messungen einer direkt messbaren Größe  $x$  erhält man die Werte  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Wenn bereits bekannt ist, dass die Verteilung der Messergebnisse die Gauß'sche Form besitzt, genügt eine relativ kleine Stichprobe (Größenordnung 10 Messungen), um die Verteilungsparameter zu bestimmen.

Im Folgenden sollen die wichtigsten Größen hergeleitet/definiert werden. Dabei sind mitunter einzelne Umformungsschritte übersprungen, die man aber durch eigenständiges Nachrechnen nachvollziehen können sollte (gute Übung!). Für weitere Details und Anmerkungen zu den Rechnungen ist z. B. das Experimental I -Lehrbuch von W. Demtröder zu empfehlen.

Die beste Näherung für den wahren Wert  $x_0$  ist das *arithmetische Mittel* der Messwerte:

$$x_0 \cong \bar{x} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (4.7)$$

Unter dieser Annahme hat mit  $e_i := x_0 - x_i$  die *Varianz*  $\sigma^2$  (mittlere quadratische Standardabweichung oder wahrscheinlicher Fehler der Einzelmessung)

$$\sigma^2 := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i^2 \quad (4.8)$$

ein Minimum. Für große  $n$  nähert sich dieser Mittelwert dem wahren Wert  $x_0$  beliebig gut an:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x} = x_0 \quad (4.9)$$

Für eine begrenzte Messreihe weicht der Mittelwert  $\bar{x}$  von  $x_0$  ab. Der Fehler des Mittelwertes wird durch  $\epsilon := x_0 - \bar{x}$  gegeben. Wir bestimmen jetzt die *Standardabweichung des Mittelwertes* unserer Stichprobe vom Erwartungswert:

$$s_{\bar{x}}^2 := \epsilon^2 = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i^2 \right)^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n e_i^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \sum_{j \neq i}^n e_j e_i \stackrel{(4.9)}{\cong} \frac{\sigma^2}{n}; \quad (4.10)$$

$$s_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad (4.11)$$

weil nach Gl. (4.9) der zweite Summand für große  $n$  verschwindet, da die Einzelmessungen unabhängig voneinander sind.

Die Größe  $\sigma^2$  (d.h. die durchschnittliche quadratische Abweichung) hängt nur von der Genauigkeit der Einzelmessung ab und nicht von ihrer Anzahl, wohingegen der Betrag von  $s_{\bar{x}}$  durch Vergrößerung von  $n$  verringert werden kann. Berechnung der *Standardabweichung der Einzelmessung* nach Gl. (4.8) mit  $\bar{x}$  anstelle von  $x_0$  liefert einen kleineren Wert als den tatsächlichen Wert von  $\sigma$  wegen der Abweichung zwischen  $\bar{x}$  und  $x_0$ . Die *mittlere quadratische Abweichung vom Mittelwert* ergibt sich mit  $v_i := \bar{x} - x_i = e_i - \epsilon$  zu

$$\langle v^2 \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (e_i - \epsilon)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{x}^2 - x_i^2 = \sigma^2 - s_{\bar{x}}^2 = \left( \frac{n-1}{n} \right) \sigma^2. \quad (4.12)$$

Daraus folgt:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}{n-1} := s_x^2 \quad (4.13)$$

$s_x^2$  wird als *empirische Varianz* definiert.  $s_x$  wird *empirische Standardabweichung der Einzelmessung* genannt:

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2} \quad (4.14)$$

Es folgt für die Standardabweichung des Mittelwertes aus Gl. (4.10):

$$s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n \cdot (n-1)} \sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2} = \frac{s_x}{\sqrt{n}}. \quad (4.15)$$

Wenn man nicht zwischen  $x_0$  und  $\bar{x}$  unterscheidet, so nähert sich  $s_x$  für große  $n$  analog zu Gl. (4.9)  $\sigma$  immer stärker an.  $s_x$  ist ein Maß für die Genauigkeit der einzelnen Messung und sollte bei der Auswertung immer mit angegeben werden.

Es gibt Taschenrechner mit eingebauter Statistikfunktion, welche nach Eingabe der Messwerte  $x_i$  u.a. den Mittelwert  $\bar{x}$  nach Gl. (4.7) und die empirische Standardabweichung  $s_x$  nach Gl. (4.14) liefern. Die *relative Standardabweichung* erhält man, wenn man die entsprechende *absolute* Größe durch den Mittelwert dividiert.

Mehrmaliges Messen einer Messgröße vermindert nach Gl. (4.10) die statistischen Fehler bei der Bestimmung des wahren Wertes  $x_0$ . Beim Messen bleibt aber das Problem der Beurteilung, wie groß der zufällige Fehler in einem bestimmten Fall sein darf. Genügt zur Bestimmung des

richtigen Wertes eine einzige Messung oder muss er durch Mittelwertbildung aus mehreren - und damit aus „wie vielen“ - Messungen bestimmt werden?

Ein Kriterium für diese Entscheidung liefert die Messgenauigkeit des verwendeten Messgerätes. Bei Zeigerinstrumenten wird die Messgenauigkeit durch die Fehlerklasse (z. B. 0,1; 0,2; 0,5; 1; 1,5; 2; 5) bestimmt. Die Fehlerklasse gibt die Fehlergrenze in Prozent an, bezogen auf den Maximalwert des Messbereiches. Für das Messgerät der Fehlerklasse  $K$  und einem Maximalwert  $x_M$  ergeben sich die Fehlergrenzen zu

$$x - \frac{K}{100}x_M < x_0 < x + \frac{K}{100}. \quad (4.16)$$

Bei Digitalmultimetern werden vom Hersteller zwei Arten möglicher Abweichungen angegeben: eine relative, die proportional zum jeweils angezeigten Messwert ist, und eine absolute, die einen für den gesamten Messbereich konstanten Wert besitzt. Eine typische Angabe ist z. B.  $\pm(0,2\% \text{ rdg.} + 1 \text{ dg})$ . Sie bedeutet, dass der Fehler sich aus 0,2% der aktuellen Anzeige („reading“) und einer Einheit („digit“) der letzten angezeigten Dezimalstelle zusammensetzt.

Solche systematischen Messfehler sind offenbar so verteilt wie zufällige Fehler. Ihre Verteilung besitzt deshalb auch die Gauß'sche Form. Als Fehlergrenze wird, je nach erforderlicher statistischer Sicherheit (siehe oben) des Gerätes, der Wert einer Standardabweichung  $\sigma$  dieser Verteilung oder deren mehrfacher Wert angenommen. In diesem Praktikum nehmen wir an, dass die Fehlergrenze aller benutzten Messgeräte eine Standardabweichung beträgt.

Die Genauigkeit der Bestimmung des Messwertes kann nicht besser als die angegebene Messgenauigkeit des verwendeten Messgerätes sein. Es wird empfohlen, die statistischen Fehler bei der Bestimmung einer Messgröße durch Mehrfachmessung und anschließender Mittelung gemäß Gl. (4.7) und Gl. (4.15) nicht weiter als bis auf 20% der Gerätefehlergrenze zu reduzieren. Manchmal kann schon eine einzelne Messung ausreichen.

#### 4.4. Fehlerfortpflanzungsgesetz

Eine Hauptaufgabe der experimentellen Wissenschaft (nicht nur der experimentellen Physik) ist die Bestimmung einer nicht direkt messbaren Größe  $G$  durch Beobachtung von direkt messbaren Größen  $x, y, z, \dots$ . Dabei ist  $G$  mit  $x, y, z, \dots$  durch die Gleichung  $G = G(x, y, z, \dots)$ , die Grundgleichung genannt wird, verknüpft. Da es grundsätzlich nicht möglich ist, durch Beobachtung den wahren Wert der Größe  $G$  zu finden, besteht die Aufgabe darin, den besten Näherungswert für  $G$  zu finden und seine Genauigkeit anzugeben.

Die Lösung des Problems ist durch das Gauß'sche Fehlerfortpflanzungsgesetz gegeben. Es sei  $G = G(x, y)$ . Die direkt gemessenen unabhängigen Größen  $x$  und  $y$ , d.h.  $x \neq x(y)$ , seien durch die Messreihen  $x_1, x_2, \dots, x_p$  und  $y_1, y_2, \dots, y_q$  gegeben ( $p, q \gg 1$ ) mit den Mittelwerten  $\bar{x}$  und  $\bar{y}$  und der *Standardabweichung der Einzelmessung*  $s_x$  und  $s_y$ . Daraus sollen der Mittelwert für  $G$  und seine Standardabweichung  $s_{\bar{G}}$  errechnet werden. Mit  $u_i = x_i - \bar{x}$  und  $v_k = y_k - \bar{y}$  bekommen wir durch Entwicklung in eine Taylorreihe:

$$G_{i,k} \equiv G(x_i, y_k) = G(\bar{x} + u_i, \bar{y} + v_k) = G(\bar{x}, \bar{y}) + \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_{\bar{x}, \bar{y}} u_i + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_{\bar{x}, \bar{y}} v_k. \quad (4.17)$$

Da angenommen wird, dass  $x \gg s_x$  und  $y \gg s_y$  sind, können die Glieder höherer Ordnung vernachlässigt werden. Aus Gl. (4.15) kann der Mittelwert für  $G$  bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \bar{G} &= \frac{1}{pq} \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^q G_{ik} = \frac{1}{pq} \left[ pqG(\bar{x}, \bar{y}) + q \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_{\bar{x}, \bar{y}} \sum_{i=1}^p u_i + p \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_{\bar{x}, \bar{y}} \sum_{k=1}^q v_k \right] \\ &= G(\bar{x}, \bar{y}). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Die Summen über  $u_i$  und  $v_k$  sind Null aufgrund der Definition des Mittelwerts gemäß Gl. (4.7). Dieses Resultat ist einfach, aber keineswegs selbstverständlich: Um den Mittelwert (und damit den besten Näherungswert) für  $G$  zu erhalten, ist es nur notwendig, in die Funktion  $G$  die Mittelwerte von  $x$  und  $y$  einzusetzen. Wie auch immer die Funktion  $G$  beschaffen sein möge, sie muss nur differenzierbar sein, und die Beobachtungswerte von  $x$  und  $y$  dürfen nicht zu weit von ihrem Mittelwert entfernt sein, denn sonst müssen in der Reihenentwicklung Gl. (4.17) Glieder höherer Ordnung berücksichtigt werden. Wir wollen nun die Standardabweichung der Einzelmessung für  $G$  berechnen. Das Quadrat dieser Größe für  $p, q \gg 1$  ist

$$\begin{aligned} s_G^2 &= \frac{1}{pq} \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^q (G_{ik} - \bar{G})^2 = \frac{1}{pq} \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^q \left[ \left( \frac{\partial G}{\partial x} \right)_{\bar{x}, \bar{y}}^2 u_i^2 + \left( \frac{\partial G}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial y} \right)_{\bar{x}, \bar{y}} u_i v_k + \left( \frac{\partial G}{\partial y} \right)_{\bar{x}, \bar{y}}^2 v_k^2 \right] \\ &= \frac{1}{pq} \left[ q \left( \frac{\partial G}{\partial x} \right)_{\bar{x}, \bar{y}}^2 \sum_{i=1}^p u_i^2 + p \left( \frac{\partial G}{\partial y} \right)_{\bar{x}, \bar{y}}^2 \sum_{k=1}^q v_k^2 \right] = \left( \frac{\partial G}{\partial x} \right)_{\bar{x}, \bar{y}}^2 s_x^2 + \left( \frac{\partial G}{\partial y} \right)_{\bar{x}, \bar{y}}^2 s_y^2. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Diese Gleichung stellt eine Form des Fehlerfortpflanzungsgesetzes dar. Sie ermöglicht die Berechnung der Standardabweichung  $s_G$  der Größe  $G$  aus den Standardabweichungen  $s_x$  und  $s_y$  der direkt gemessenen Größen  $x$  und  $y$ .

Wenn  $G$  von mehr als zwei direkt messbaren Größen abhängt, lässt sich die allgemeinere Form für die Standardabweichungen analog ableiten:

$$s_G = \sqrt{\sum_{j=1}^n \left[ \left( \frac{\partial G}{\partial x_j} \right)_{\bar{x}_j}^2 s_{x_j}^2 \right]}. \quad (4.20)$$

Es soll hier noch darauf hingewiesen werden, dass das Fehlerfortpflanzungsgesetz nur bei voneinander unabhängigen und normalverteilten Größen gilt.

Der beste Wert von  $G$  ist, wie oben gezeigt wurde,

$$\bar{G}(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n) = G(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_j, \dots, \bar{x}_n). \quad (4.21)$$

Seine Standardabweichung erhalten wir, wenn wir anstatt der Standardabweichungen  $s_{x_j}$  der Einzelmessungen  $x_j$  die Standardabweichungen  $s_{\bar{x}_j}$  der Mittelwerte  $\bar{x}_j$  einsetzen:

$$s_{\bar{G}} = \sqrt{\sum_{j=1}^n \left[ \left( \frac{\partial G}{\partial x_j} \right)_{\bar{x}_j}^2 s_{\bar{x}_j}^2 \right]} \quad (4.22)$$

Falls die zufällige Abweichung dominant ist, wird die Standardabweichung des Mittelwertes gemäß Gl. (4.15) ausgerechnet. Falls der systematische Fehler dominant ist, wird Gl. (4.16) als Fehlergrenze angenommen.

Beispiele:

$$G(x, y) = x + y \quad \implies \quad \bar{G} = \bar{x} + \bar{y}, \quad s_{\bar{G}} = \sqrt{s_{\bar{x}}^2 + s_{\bar{y}}^2}, \quad (4.23)$$

$$G(x, y) = x - y \quad \implies \quad \bar{G} = \bar{x} - \bar{y}, \quad s_{\bar{G}} = \sqrt{s_{\bar{x}}^2 + s_{\bar{y}}^2}. \quad (4.24)$$

Die Standardabweichungen in beiden Beispielen sind gleich groß! Diese Fälle entsprechen auch der Messung einer Messgröße  $x$  mit einem Gerät, das einen systematischen Fehler  $y$  besitzt. Wenn wir annehmen, dass der systematische Messfehler normal verteilt ist, dann ist  $\bar{y} = 0$ . Die Standardabweichung des Messwert  $s$  könnte dann aus den Beispielen (1) und (2) entnommen werden. Falls die zufällige Abweichung dominant ist,  $s_{\bar{x}} \gg s_{\bar{y}}$ , wird  $s_{\bar{G}} = s_{\bar{x}}$  durch die Anzahl der Messungen bestimmt. Bei einer schlechten Genauigkeit des Messgerätes,  $s_{\bar{x}} \ll s_{\bar{y}}$ , wird der Messfehler  $s_{\bar{G}} = s_{\bar{y}}$  allein durch die Fehlergrenze des Gerätes bestimmt.

Betrachten wir nun das Beispiel

$$G(x, y, z) = a \frac{x^b y^c}{z^d}. \quad (4.25)$$

Es seien  $x, y, z$  direkt gemessene Größen und  $a, b, c, d$  Konstanten. Für  $\overline{G}$  und  $s_{\overline{G}}$  erhält man:

$$\overline{G} = a \frac{\overline{x}^b \overline{y}^c}{\overline{z}^d}. \quad (4.26)$$

$$s_{\overline{G}} = \overline{G} \sqrt{\left(b \frac{s_{\overline{x}}}{\overline{x}}\right)^2 + \left(c \frac{s_{\overline{y}}}{\overline{y}}\right)^2 + \left(d \frac{s_{\overline{z}}}{\overline{z}}\right)^2} \quad (4.27)$$

Die Größen in den Klammern sind relative Standardabweichungen gewichtet mit der zugehörigen Potenz.

Das vollständige Messergebnis mit quantitativen Angaben zur Genauigkeit muss in einer der folgenden Formen angegeben werden:

$$G = \overline{G} \pm s_{\overline{G}} \quad (\text{absolute Genauigkeit}), \quad (4.28)$$

$$G = \overline{G} \left(1 \pm \frac{s_{\overline{G}}}{\overline{G}}\right) \quad (\text{relative Genauigkeit}). \quad (4.29)$$

Ein Beispiel soll das Prinzip der Fehlerfortpflanzung verdeutlichen. Es soll das Volumen eines Zylinders gemäß

$$V = \frac{\pi}{4} d^2 h \quad (4.30)$$

berechnet werden. Hierzu werden Höhe  $h$  und Durchmesser  $d$  des Zylinders mehrfach mit einem Messschieber gemessen. Dabei ergeben sich durch die Mittelung der Messwerte und Berechnung der Standardabweichung folgende Werte:

$$d = 50 \pm 0,05 \text{ mm}, \quad (4.31)$$

$$h = 100 \pm 0,1 \text{ mm}. \quad (4.32)$$

Bei dem hier angegebenen Messfehler handelt es sich um den statistischen Fehler, entstanden durch die Mittelung mehrerer Messwerte. Zusätzlich hat allerdings auch jedes Messgerät eine Ungenauigkeit (wenn diese nicht gegeben ist, ist dies die kleinste Skalierung). Diese Ungenauigkeit ist bei dem Messschieber 0,05 mm. Damit setzt sich der Gesamtfehler für Durchmesser und Höhe zusammen aus dem statistischen Fehler der Mittelung und der Ungenauigkeit des Messschiebers. Nach Gl. (4.22) berechnet er sich wie folgt:

$$s_d = \sqrt{s_{\text{stat},d}^2 + s_{\text{ung}}^2} = \sqrt{0,05^2 \text{ mm}^2 + 0,05^2 \text{ mm}^2} = 0,07 \text{ mm}, \quad (4.33)$$

$$s_h = \sqrt{s_{\text{stat},h}^2 + s_{\text{ung}}^2} = \sqrt{0,01^2 \text{ mm}^2 + 0,05^2 \text{ mm}^2} = 0,11 \text{ mm}. \quad (4.34)$$

Damit ergeben sich die Werte für Durchmesser und Höhe mit tatsächlichem Gesamtfehler zu

$$d = 50,00 \pm 0,07 \text{ mm}, \quad (4.35)$$

$$h = 100,0 \pm 0,1 \text{ mm}. \quad (4.36)$$

Gemäß Gl. (4.30) ergibt sich so das Volumen und nach Gl. (4.22) der Fehler für das Volumen als

$$s_V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial d}\right)^2 s_d^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)^2 s_h^2} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{2} h d\right)^2 s_d^2 + \left(\frac{\pi}{4} d^2\right)^2 s_h^2} = 584 \text{ mm}. \quad (4.37)$$

Somit ergibt sich als Ergebnis für das Volumen

$$V = \underline{\underline{(196,4 \pm 0,6) \text{ cm}^3}}. \quad (4.38)$$

## 4.5. Lineare Regression

Es wurde gezeigt, dass der wahre Wert  $x_0$  einer Größe  $x$  durch mehrmaliges Messen derselben und Mittelwertbildung über die streuenden Messwerte  $x_i$  bestmöglich angenähert wird. Ebenso ist es möglich, den funktionalen Zusammenhang  $y = f(x)$  zwischen einer Variablen  $x$  und einer von ihr abhängigen Größe  $y$  aus  $n$  gemessenen Wertepaaren  $(x_i, y_i)$  optimal zu bestimmen.

Dazu muss zunächst die Funktion  $f$  bekannt sein, z.B. eine Exponentialfunktion. Diese Information kommt von der Modellvorstellung zu dem betreffenden Experiment. Um die Richtigkeit dieser Modellvorstellung zu verifizieren, ist es naheliegend, zunächst die Messwerte  $y_i$  gegen  $x_i$  graphisch aufzutragen und zu schauen, durch welche Kurve die Wertepaare sich annähernd beschreiben lassen. Der damit gewonnene qualitative Eindruck lässt sich oft durch eine geeignete Transformation der Koordinatenachsen, welche die Kurve in eine Gerade überführt, bestätigen. Ob die so aufgetragenen Messpunkte wirklich auf einer Geraden liegen, kann einfach durch Anlegen eines Lineals festgestellt werden. Da jede Kurve durch geeignete Transformation der Koordinatenachsen in eine Gerade überführt werden kann, werden wir uns nur mit dem Fall beschäftigen, dass die gesuchte Funktion eine Gerade ist:

$$y = a + bx. \quad (4.39)$$

Unsere Aufgabe lautet, die Werte der Parameter  $a$  und  $b$  für die beste Gerade durch die Messpunkte zu berechnen. Die beste Methode dafür ist die *Methode der kleinsten Quadrate*. Sie ist die Standardmethode der Statistik.

Angenommen, es gibt  $n$  Paare von Messwerten  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ . Wir setzen voraus, dass die dominierenden Fehler nur bei den  $y$ -Werten auftreten, was sehr oft erfüllt ist. Für ein vorgegebenes Wertepaar  $(x_i, y_i)$  beträgt die Abweichung  $d_i$  von der angenommenen Geraden

$$d_i = y_i - bx_i - a. \quad (4.40)$$

Als beste Werte für  $a$  und  $b$  werden diejenigen angenommen, für die die Summe aller quadratischen Abweichungen ein Minimum wird, also

$$\frac{\partial}{\partial a} \sum_{i=1}^n d_i^2 = 0 \implies b \sum_{i=1}^n x_i + an = \sum_{i=1}^n y_i, \quad (4.41)$$

$$\frac{\partial}{\partial b} \sum_{i=1}^n d_i^2 = 0 \implies b \sum_{i=1}^n x_i^2 + a \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i. \quad (4.42)$$

Die erste Gleichung lässt erkennen, dass die beste Gerade durch den Punkt

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (4.43)$$

geht, also den Schwerpunkt aller Punkte. Aus Gl. (4.41) und Gl. (4.42) folgt

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) y_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2} \quad (4.44)$$

und

$$a = \bar{y} - b \bar{x}. \quad (4.45)$$

Die Quadrate der Standardabweichungen von  $b$  und  $a$  sind gegeben durch

$$s_b^2 \cong \frac{1}{n-2} \frac{\sum_{i=1}^n d_i^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (4.46)$$

und

$$s_a^2 \cong \left( \frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right) \frac{\sum_{i=1}^n d_i^2}{n-2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \frac{\sum_{i=1}^n d_i^2}{n-2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} s_b^2. \quad (4.47)$$

Das Quadrat der Standardabweichungen der  $y$ -Werte um die Gerade ist gegeben durch

$$s_y^2 \cong \frac{\sum_{i=1}^n d_i^2}{n-2}. \quad (4.48)$$

Falls wir die beste Gerade durch den Ursprung suchen, d.h.  $y = cx$ , wird der Wert für  $c = b$  durch Gl. (4.42) mit  $a = 0$  gegeben:

$$c = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}. \quad (4.49)$$

Eine Abschätzung für die Standardabweichung liefert ( $s_a^2 = 0$ )

$$s_c^2 \cong \frac{1}{n-1} \frac{\sum_{i=1}^n d_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}. \quad (4.50)$$

Damit ist die gestellte Aufgabe gelöst.

Das Prinzip der linearen Regression soll an einem **Beispiel** verdeutlicht werden: Es soll der Wärmeausdehnungskoeffizient  $\alpha$  eines Metallstabs bestimmt werden. Der Stab habe bei Raumtemperatur eine Länge  $L_0$ . Wird die Temperatur um den Wert  $\Delta T$  erhöht, so verlängert sich der Stab durch thermische Ausdehnung auf die Länge  $L$ . Es gilt:

$$L = \alpha L_0 \Delta T + L_0 = L_0 (1 + \alpha \Delta T). \quad (4.51)$$

Damit handelt es sich um eine lineare Gleichung für  $L$  als Funktion von  $\Delta T$ . Tab. 4.1 zeigt Messwerte für eine beispielhafte Messung.

**Tabelle 4.1:** Beispielhafte Messwerte. Aufgeführt sind die Temperatur  $T$ , Temperaturänderung  $\Delta T$ , Länge  $L$  eines Stabes sowie die Summe der jeweiligen Messwerte (benötigt zur Berechnung der Hilfsgrößen). Die Spalten 5 bis 8 enthalten Hilfsgrößen zur Durchführung der linearen Regression.

| $i$      | $T_i$<br>°C | $\Delta T_i$<br>K | $L_i$<br>mm | $\Delta T_i L_i$<br>K mm | $(\Delta T_i)^2$<br>K <sup>2</sup> | $(\Delta T_i - \overline{\Delta T})^2$<br>K <sup>2</sup> | $(L_i - b \Delta T_i - a)^2$<br>mm <sup>2</sup> |
|----------|-------------|-------------------|-------------|--------------------------|------------------------------------|----------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| 1        | 30          | 8                 | 1000,184    | 8001,472                 | 64                                 | 400                                                      | $7,84 \times 10^{-6}$                           |
| 2        | 40          | 18                | 1000,414    | 18007,452                | 324                                | 100                                                      | $1,44 \times 10^{-6}$                           |
| 3        | 50          | 28                | 1000,641    | 28017,948                | 784                                | 0                                                        | $67,24 \times 10^{-6}$                          |
| 4        | 60          | 38                | 1000,879    | 3803,402                 | 1444                               | 100                                                      | $17,64 \times 10^{-6}$                          |
| 5        | 70          | 48                | 1001,125    | 48054,000                | 2304                               | 400                                                      | $60,84 \times 10^{-6}$                          |
| $\Sigma$ | 140         | 140               | 5003,243    | 140114,274               | 4920                               | 1000                                                     | $155,00 \times 10^{-6}$                         |

Dabei entspricht  $\Delta T$  den  $x$ -Werten und  $L$  den  $y$ -Werten. Als Mittelwerte dieser Größen ergibt sich nach Gl. (4.7):

$$\overline{\Delta T} = 28 \text{ K}, \quad (4.52)$$

$$\overline{L} = 1000,649 \text{ mm}. \quad (4.53)$$

Ebenfalls in Tab. 4.1 angegeben sind die Hilfsgrößen, welche benötigt werden für die Berechnung der Steigung  $b$  und des Achsenabschnitts  $a$  gemäß Gl. (4.44) und Gl. (4.45):

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2} = \frac{\sum_{i=1}^5 \Delta T_i L_i - 5 \overline{\Delta T} \bar{L}}{\sum_{i=1}^5 \Delta T_i^2 - 5 \overline{\Delta T}^2} = 0,0234 \frac{\text{mm}}{\text{K}}, \quad (4.54)$$

$$a = \bar{y} - b \bar{x} = \bar{L} - b \bar{T} = 999,994 \text{ mm}. \quad (4.55)$$

Damit ergibt sich der Wärmeausdehnungskoeffizient  $\alpha$  nach Gl. (4.51):

$$b = \alpha L_0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{b}{L_0} = \frac{b}{a} = 23,4 \times 10^{-6} \frac{1}{\text{K}}. \quad (4.56)$$

Die Fehler für  $a$  und  $b$  ergeben sich aus Gl. (4.46) und Gl. (4.47). Dazu werden erneut die Hilfsgrößen aus Tabelle 3.1 benötigt. Es ist

$$s_b^2 = \frac{1}{n-2} \frac{\sum_{i=1}^n d_i^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{1}{3} \frac{\sum_{i=1}^5 d_i^2}{\sum_{i=1}^5 (\Delta T_i - \overline{\Delta T})^2} = 0,0517 \times 10^{-6} \frac{\text{mm}}{\text{K}}, \quad (4.57)$$

$$s_a^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} s_b^2 = \frac{\sum_{i=1}^5 \Delta T_i^2}{5} s_b^2 = 51,67 \times 10^{-6} \text{ mm}^2. \quad (4.58)$$

Damit ergibt sich schlussendlich als Ergebnis der Regression:

$$a = L_0 = (999,994 \pm 0,007) \text{ mm}, \quad (4.59)$$

$$b = \alpha L_0 = (0,0234 \pm 0,0002) \frac{\text{mm}}{\text{K}}. \quad (4.60)$$

Um den Fehler von  $\alpha$  zu erhalten wird dieser noch mit Hilfe der Fehlerfortpflanzung bestimmt. Nach Gl. (4.60) und Gl. (4.22) ergibt sich so mit  $L_0$  aus Gl. (4.59):

$$\alpha = \frac{b}{L_0} = \frac{b}{a} = 2,34 \times 10^{-5} \frac{1}{\text{K}}, \quad (4.61)$$

$$s_\alpha = \sqrt{\left(\frac{\partial \alpha}{\partial a}\right)^2 s_a^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial b}\right)^2 s_b^2} = \sqrt{\frac{b^2}{a^4} s_a^2 + \frac{1}{a^2} s_b^2} = 2,00 \times 10^{-7} \frac{1}{\text{K}}. \quad (4.62)$$

Eine lineare Regression kann auch **graphisch** durchgeführt werden. Hierzu werden die Messwerte in ein ausreichend großes Diagramm eingetragen, idealerweise auf Millimeterpapier. Durch die Messwerte wird mit einem Lineal eine Gerade derart eingezeichnet, dass die Abstandsquadrate aller Punkte zur Gerade möglichst gering sind. Dies bedeutet, dass ungefähr gleich viele Punkte ober- bzw. unterhalb der Geraden liegen sollten und möglichst viele Punkte möglichst dicht an dieser Geraden liegen. Durch das Fortführen der Geraden zur vertikalen Achse kann der Achsenabschnitt  $a$  durch Ablesen bestimmt werden. Die Steigung  $b$  wird mit Hilfe eines Steigungsdreiecks bestimmt. Bei Regressionen, die keinen Abschnitt besitzen, beginnt die Gerade im Ursprung.

Zur Abschätzung des Fehlers der graphischen linearen Regression wird eine zweite Gerade in das Diagramm eingezeichnet, die so weit wie möglich von der ersten Gerade abweicht, jedoch noch immer eine gute Regressionsgerade für die eingezeichneten Messdaten bildet. Dies erfolgt in einer anderen Farbe oder gestrichelt. Auch für die zweite Gerade werden Abschnitt  $a'$  und Steigung  $b'$  abgelesen bzw. berechnet. Der Fehler ergibt sich dann als Differenz:

$$s_a = |a - a'|, \quad (4.63)$$

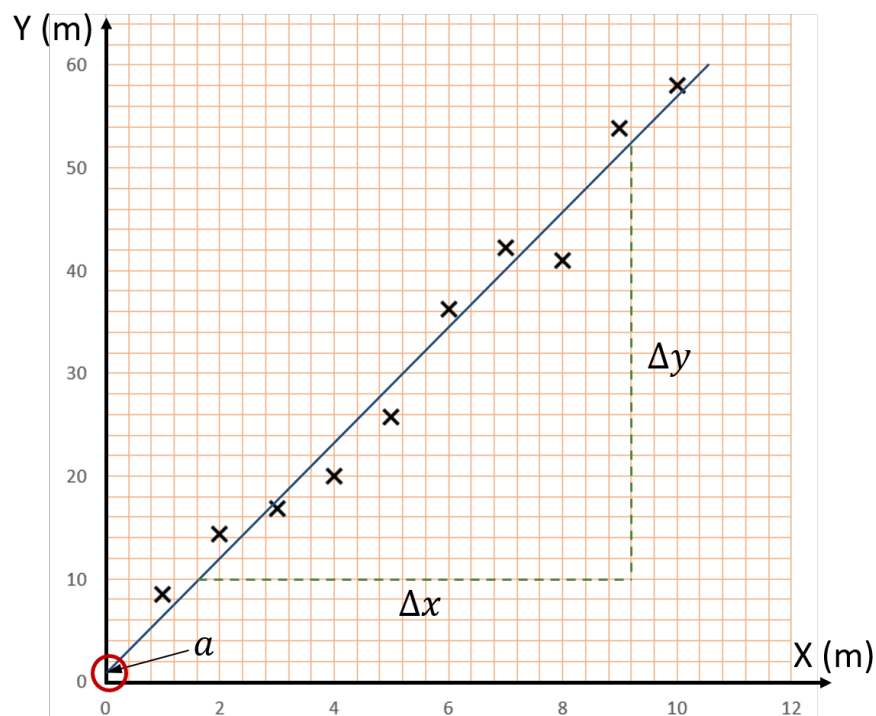
$$s_b = |b - b'|. \quad (4.64)$$

Auch die graphische lineare Regression soll an einem **Beispiel** verdeutlicht werden.

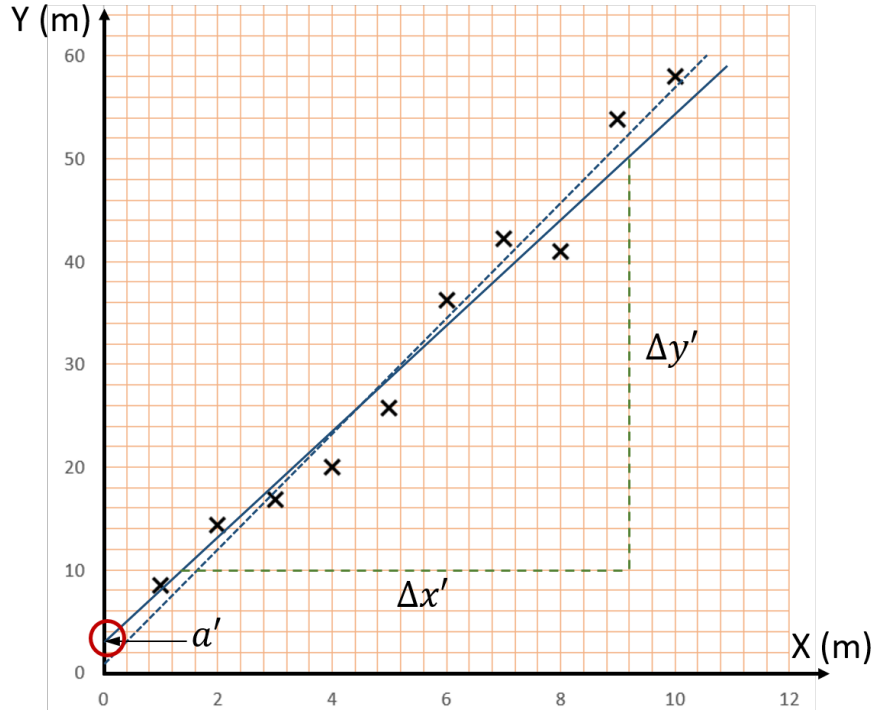
Tab. 4.2 zeigt einige Beispiel-Messwerte. Diese sind in Abb. 4.3 in ein Diagramm eingetragen. Ebenfalls bereits eingezeichnet ist eine erste Regressionsgerade. Zu erkennen ist, dass diese so gezeichnet wurde, dass sie dicht an allen Punkten liegt und ungefähr gleich viele Punkte ober- wie unterhalb der Geraden liegen.

**Tabelle 4.2:** Beispielhafte Messdaten für eine graphische lineare Regression.

|               |      |      |      |    |       |      |      |    |       |    |
|---------------|------|------|------|----|-------|------|------|----|-------|----|
| $x(\text{m})$ | 1    | 2    | 3    | 4  | 5     | 6    | 7    | 8  | 9     | 10 |
| $y(\text{m})$ | 8,45 | 14,4 | 16,8 | 20 | 25,75 | 36,3 | 42,2 | 41 | 53,85 | 58 |



**Abbildung 4.3:** Beispiel für eine graphische lineare Regression. Die Messwerte aus Tab. 4.2 sind als Kreuze eingezeichnet. Die Regressionsgerade ist dunkelblau eingezeichnet. Ein Steigungsdreieck ist grün gestrichelt eingezeichnet. Der rote Kreis markiert den Achsenabschnitt  $a$ .



**Abbildung 4.4:** Alternative Regressionsgerade zu den Messwerten (Kreuze) aus Tab. 4.2 zur Fehlerbestimmung. Die gestrichelte Gerade stellt die Gerade aus Abb. 4.3 dar. Das Steigungsdreieck ist grün, der Achsenabschnitt rot markiert.

Aus einem eingezeichneten Steigungsdreieck wird die Steigung  $b$  abgelesen gemäß

$$b = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (4.65)$$

Ebenso wird durch die Verlängerung der Geraden zur Ordinatenachse ( $y$ -Achse) der Achsenabschnitt abgelesen. Es ergeben sich Werte

$$a = 1,0, \quad (4.66)$$

$$b = \frac{52 - 10}{9,2 - 1,6} = \frac{42}{7,6} \approx 5,5. \quad (4.67)$$

Zur Abschätzung der Fehler wird eine zweite, ebenfalls „gute“ Regressionsgerade eingezeichnet, die aber größtmöglich von der ersten abweicht. Dies ist in Abbildung 3.4 geschehen. Auch für diese Gerade werden Abschnitt  $a$  und Steigung  $b$  abgelesen bzw. berechnet:

$$a' = 3, \quad (4.68)$$

$$b' = \frac{50 - 10}{9,2 - 1,4} = \frac{40}{7,8} \approx 5,1. \quad (4.69)$$

Aus den Werten aus Gl. (4.66) bis Gl. (4.69) ergibt sich so mit Hilfe von Gl. (4.63) und Gl. (4.64) als Fehler der graphischen Regression

$$s_a = |1 - 3| = 2 \quad \text{und} \quad (4.70)$$

$$s_b = |5,5 - 5,1| = 0,4. \quad (4.71)$$

Somit liefert diese graphische Regression als Ergebnis:

$$a = 1 \pm 2, \quad (4.72)$$

$$b = 5,0 \pm 0,4. \quad (4.73)$$

#### **4.6. Weitere Hinweise zur Fehlerrechnung**

Zusätzlich zu den Beispielen in diesem Heft besteht die Möglichkeit, im vorbereitenden Online-Kurs auf der Lernplattform Moodle zu diesem Praktikum Beispiele, Übungsaufgaben und kleine Tests zur Fehlerrechnung durchzuführen. Dies wird insbesondere dann empfohlen, wenn Sie noch keine Erfahrung mit Fehlerrechnung haben.

## 5. Protokoll

Das Protokoll soll Ihre Arbeit im Praktikum dokumentieren. Daher ist es wichtig, dass man Ihrem Protokoll ohne Hilfsmittel folgen und Ihren Versuch eigenständig rekonstruieren kann. Folglich müssen alle für das Verständnis notwendigen Informationen zum Versuch und der Physik dahinter im Protokoll zu finden sein.

Die Protokolle werden digital als PDF-Datei über Moodle abgegeben. Um einer ansehnlichen digitalen Formatierung der Formeln, Tabellen und Abbildungen zu genügen, wird dringend empfohlen, das Textsatzprogramm **TeX** bzw. Softwarepaket **L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X** zu benutzen (z. B. über das cloud-basierte [Overleaf](https://de.overleaf.com/learn/latex/Learn_LaTeX_in_30_minutes)). Sie finden in Moodle eine Vorlage für die Protokolle. Wem der Umgang mit L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X noch nicht geläufig ist, wird stark ans Herz gelegt, sich vor Beginn des Praktikums gut einzuarbeiten. Einen guten Überblick über die Grundlagen können Sie sich hier verschaffen: [https://de.overleaf.com/learn/latex/Learn\\_LaTeX\\_in\\_30\\_minutes](https://de.overleaf.com/learn/latex/Learn_LaTeX_in_30_minutes)

Sie können Ihr Protokoll alleine oder in Partnerarbeit schreiben. Ein Austausch über das Protokoll und insbesondere die Ergebnisse mit Ihrem Praktikumsteam wird empfohlen. Sie können auch zu zweit ein einzelnes Protokoll ausarbeiten und abgeben. Die Abgabe des Protokolls erfolgt am nächsten Versuchstag. Bitte beachten Sie, dass eine versäumte Abgabe mit einem Zwischenstatat versehen wird (siehe Abs. 2.3)!

**Partnerarbeit bedeutet hierbei: Ein Protokoll kann maximal zu zweit abgegeben werden. Ausnahmen sind die offenen Versuche.**

### 5.1. Protokollaufbau

Um sich mit dem Aufbau eines Protokolls vertraut zu machen, betrachten Sie bitte die Protokollvorlage in Ihrem Online-Kurs, welche sich am Aufbau von wissenschaftlichen Arbeiten orientiert. Dabei setzt sich das Protokoll aus den folgenden Teilen zusammen:

- **Name des Versuchs**
- **Namen der Versuchsdurchführenden** (bei offenen Experimenten die Namen aller Team-Mitglieder)
- **Datum der Versuchsdurchführung**
- **Abstract** Hier steht eine Zusammenfassung, die die Motivation, das Ziel, die Methoden und die Ergebnisse kurz und prägnant, darstellt. Nur die allerwichtigsten Zahlenwerte gehören hier hin.
- **Einleitung** In der Einleitung wird die Aufgabe erläutert und das Ziel der Messung vorgestellt. Auch kurze historische Verweise sind hier oft sinnvoll, um eine kurze Einordnung der Experimente in den wissenschaftlichen Kontext zu erläutern. Fassen Sie sich hier aber bitte kurz.
- **Theoretische Grundlagen** Kurze Zusammenfassung der wichtigsten Überlegungen und Formeln, die in dem Versuch verwendet werden. Dieser Abschnitt muss bereits im Vorfeld des Praktikums geschrieben werden und ca. 2-3 Seiten lang sein. In der schriftlichen Vorbereitung vermitteln Sie das für den Versuch benötigte Grundwissen. Wenn möglich sollen in der Vorbereitung bereits Formeln hergeleitet werden, die für die Auswertung von Bedeutung sind. Details zur schriftlichen Vorbereitung finden Sie in Abs. 3.2. Bei offenen Experimenten entfällt die schriftliche Vorbereitung, stattdessen bereiten Sie sich mit der Online-Vorbereitung auf Moodle vor.

- **Experimenteller Aufbau und Durchführung** Beschreiben Sie hier das Prinzip der Messmethode, Einzelheiten des Versuchsaufbaus (nur soweit sie spezifisch und zur Beurteilung der Qualität der Messergebnisse von Bedeutung sind, wie z. B. die Messgenauigkeiten der verwendeten Geräte und Hilfsmittel) und erläutern Sie das Grundprinzip des Versuchs. Dabei geht es nicht darum, den Versuchsaufbau detailgetreu ins Protokoll zu übertragen! Tatsächlich kann und soll die Versuchsskizze abstrakt gehalten werden. Es genügt, wenn aus der Skizze das Funktionsprinzip aller Bauteile deutlich wird. Übernehmen Sie Skizzen oder Abbildungen aus dem Anleitungsheft nicht ungeprüft, da diese z. T. andere Aufbauten oder nur Teile des Versuchsaufbaus darstellen. Sie dürfen Bauelemente wie Vakuumpumpen, Kühlsysteme oder Lichtquellen ebenso abstrakt darstellen, wie Sie es von elektrischen Schaltungen gewohnt sind. Die Abbildung sollte übersichtlich, die Größenverhältnisse und relevante Größenangaben erwähnen und alle Teile der Abbildung sollten beschriftet werden. Alle Teile, die aus Platzgründen nicht in der Skizze beschriftet werden können, werden in einer Legende benannt. Wie alle Abbildungen muss auch die Versuchsskizze gemäß Abschnitt 5.3 beschriftet werden. Die Beschriftung kann hierbei die Legende der Skizze enthalten. Eine Skizze alleine reicht oft nicht aus, um den Versuchsaufbau eindeutig zu schildern. Daher wird der Versuchsaufbau auch in Worten erläutert. Die Beschreibung sollte auch ohne Versuchsskizze verständlich sein. Benennen Sie alle Geräte und ihre Eigenschaften. Beispiele hierfür wären etwa Messbereich, verwendete Materialien, Spulenwindungen, Abmessung oder Spannung/Stromstärke. Benennen Sie auch die Konstellation dieser Geräte – welche Geräte sind wie miteinander verbunden oder stehen in welchem Abstand? Beachten Sie, dass es sich lediglich um eine Beschreibung des *Aufbaus* handelt; Sie sollen hier noch nicht die Versuchsdurchführung schildern!

Beschreiben Sie anschließend die Schritte, die Sie während des Versuchs unternommen haben, und wie die Messwerte ermittelt wurden. Auch Änderungen am Versuchsaufbau und die Kalibrierung von Messgeräten gehören in die Beschreibung. *Es muss möglich sein, den Versuch nur anhand Ihrer Beschreibung von Aufbau und Durchführung ohne das Anleitungsheft durchzuführen.*

- **Ergebnisse und Diskussion** Dies ist der Hauptteil des Protokolls. Werten Sie den Versuch gemäß den Vorgaben aus der Versuchsanleitung aus. Berücksichtigen Sie auch Absprachen mit der Lehrperson, insbesondere bei offenen Experimenten (bei denen es keine andere Anleitung zur Auswertung gibt). Sie müssen die Auswertung nachvollziehbar dokumentieren und jeden Schritt mit ganzen Sätzen erläutern. Geben Sie dazu die verwendete Formel an und zeigen Sie die Rechnung mit eingesetzten Zahlen exemplarisch für einen Wert; die übrigen Ergebnisse können in einer Tabelle stehen. Erklären Sie zudem die physikalischen Phänomene, welche im Versuch beobachtet werden, und wie sich diese in den Messwerten widerspiegeln. Wann immer Sie Formeln oder Messwerte verwenden, muss deutlich werden, woher diese stammen. Zu diesem Zweck sollten Sie Formeln, Graphen und Tabellen in Ihrem Text referenzieren. Alle Formeln, die Sie verwenden, müssen in Ihrem Protokoll stehen, auch die Formeln zur linearen Regression und zur Fehlerfortpflanzung. Bei wiederholter Verwendung genügt ein Verweis auf die Gleichungsnummer im Protokoll. Vermeiden Sie undeutliche Verweise wie „Gleichung aus der Anleitung“. Sollten Sie in der Vorbereitung keinen Platz für die Herleitung einer Formel gehabt haben, so kann diese Herleitung auch in der Auswertung erfolgen. Messwerte und Rechenergebnisse sollten, wo möglich, graphisch dargestellt werden. So sollte zu jeder Regression auch eine graphische Darstellung der Messwerte sowie der Regressionsgeraden zu finden sein.

Ergebnisse werden nur so genau angegeben, wie es die Unsicherheit zulässt; gerechnet wird mit ungerundeten Werten. Bestimmen Sie für jedes berechnete Ergebnis die Unsicherheit mit Fehlerfortpflanzung. Gehen Sie auf Ergebnisse ein und vergleichen Sie diese mit Literaturwerten (Quellenangabe nicht vergessen) bzw. mit den Ergebnissen anderer Methoden. Grobe Abweichungen von erwartbaren Werten müssen diskutiert werden. Zeigen Sie in der Fehlerdiskussion die relevanten Fehlerquellen auf, wenn möglich quantitativ, und for-

mulieren Sie mögliche Verbesserungen. Ziel ist weder, Abweichungen schönzureden, noch, Messung und Instrumente überkritisch zu beurteilen. Allgemeine Fehlerquellen ohne Bezug zum Versuch genügen nicht.

Achten Sie unbedingt darauf, dass Ihre Auswertung kohärent ist, also problemlos gelesen werden kann, ohne die Versuchsanleitung zu kennen! Führen Sie die Schritte aus der Anleitung nicht einfach nur unkommentiert durch, sondern erläutern Sie auch, wozu diese Rechnungen angestellt werden und wie.

Vergleichen Sie Ihre Messwerte mit den theoretischen Erwartungen. Alle Messdaten müssen im Protokoll abgedruckt sein: Die zur Berechnung der Ergebnisse notwendigen Daten stehen im Hauptteil, weitere Messwerte im Anhang.

- **Zusammenfassung** Am Ende des Protokolls sollen alle Ergebnisse mit Fehlerangaben erneut übersichtlich präsentiert werden. Eventuell mit einem Ausblick was für Messungen Sie noch interessant fänden. Letzteres ist optional.
- **Literaturverzeichnis** Geben Sie hier Ihre verwendete Literatur an und verwenden Sie gängige Zitierstile im Protokoll (Typischerweise IEEE). Fehlende oder falsche Quellenangaben (auch für Abbildungen und Formeln) gelten als schwerer Mangel.
- **Anhang** Hierhin gehören stets die Laborbuchseiten und Originalmessdaten sowie weitere Tabellen, die nicht für das Verständnis des Protokolls essentiell sind aber weitere Informationen zum Versuch liefern.

## 5.2. Tabellen

Alle Tabellen müssen beschriftet werden. Zur Beschriftung einer Tabelle gehören zwei Teile: einerseits eine *Kennzeichnung* in Form einer Nummer. Diese setzt sich zusammen aus der Nummer des Versuchs und der Nummer der Tabelle. So wird zum Beispiel die erste Tabelle von Versuch 2 mit „Tabelle 2.1“ bezeichnet, die zweite Tabelle mit „Tabelle 2.2“ und so weiter. Andererseits enthält die Beschriftung eine *Beschreibung* des Inhalts der Tabelle. Diese erläutert, welche Werte in der Tabelle aufgeführt sind und woher diese stammen (aus einer Messung oder einer Rechnung). Bei Berechnungen wird zusätzlich angegeben, nach welchen Formeln die Werte berechnet wurden, sofern dies nicht aus der Tabelle ersichtlich wird. Diese Beschreibung soll ausschließlich beschreibend sein und enthält keine Deutung oder Auswertung der Inhalte der Tabelle. Wer die Tabelle liest, sollte in der Lage sein, nur anhand der Tabelle und ihrer Beschriftung zu verstehen, was in der Tabelle steht, und woher diese Werte stammen, unabhängig davon, ob der Text des Protokolls bekannt ist. Tabellen und Abbildungen müssen auch für sich genommen verständlich sein, ohne dass man den Text lesen muss. „Aufbau zu Versuchsteil 2“ ist wenig aussagekräftig, „Skizze des Aufbaus zur Bestimmung der Wellenlänge“ ist verständlich. Die Beschriftung einer Tabelle steht als Überschrift oberhalb der Tabelle.

Werden im weiteren Verlauf des Protokolls ein oder mehrere Werte aus einer Tabelle benötigt, so kann man mit Hilfe der Kennzeichnung einfach auf diese Tabelle verweisen, z. B. „Aus den Werten für die Temperatur aus Spalte 3 von Tabelle 2.2 ergibt sich...“

Gerade bei einer rechnerischen linearen Regression empfiehlt es sich, eine Tabelle zu verwenden. Für die Regression werden verschiedene Hilfsgrößen wie etwa der mittlere quadratische Fehler oder das Produkt von  $x$ -Wert und  $y$ -Wert benötigt. Da diese für alle Messwerte berechnet müssen, ist es sinnvoll, diese Hilfsgrößen in Form einer Tabelle darzustellen. Ein Beispiel hierfür ist Tabelle 4.2. Auch bei einer solchen Regressionstabelle muss in der Beschriftung erklärt werden, nach welcher Formel die Werte bestimmt wurden.

Tabelle 5.1 zeigt ein Beispiel für eine *schlechte Tabelle*: die Tabelle ist unübersichtlich gestaltet. Sie enthält unnötige vertikale und horizontale Linien. Die Markierungen einiger Werte sorgen für zusätzliche Unübersichtlichkeit, zumal die Bedeutung dieser Markierung nirgendwo erläutert

wird. Einige Werte enthalten übertrieben viele Dezimalstellen (gemessen an der Zahl der Stellen der Messwerte) und die unschöne Taschenrechner-Notation „E-06“. Die letzte Zeile der Tabelle wird ebenfalls nicht erläutert, obwohl sie scheinbar nicht zu den eigentlichen Messwerten gehört. Hinzu kommt, dass die Beschreibung der Tabelleninhalte zu kurz gehalten ist und keine Information enthält über die Herkunft der Messwerte, und wie die Hilfsgrößen in der letzten Spalte berechnet wurden. Schließlich findet in der Beschreibung Auswertung statt.

**Tabelle 5.1:** *Lineare Regression. Der Wert für  $k \cdot b_0$  ist nahe am tatsächlichen Wert, was dafür spricht, dass die Messung gelungen ist.*

| $ c_n - c_{-n} $<br>mm | $n$ | $x_i$<br>1/mm | $B_i$<br>mm | --     | $x_i B_i$  | $x_i^2$<br>mm <sup>2</sup> | $d_i^2$<br>mm <sup>2</sup> |
|------------------------|-----|---------------|-------------|--------|------------|----------------------------|----------------------------|
| 113,9                  | 7   | 0,13169447    | 0,106       |        | 0,01395961 | 0,01734343                 | 1,74451E-06                |
| 80,0                   | 10  | 0,2625        | 0,186       |        | 0,048825   | 0,06890625                 | 1,34256E-06                |
| 88,2                   | 17  | 0,3968254     | 0,266       |        | 0,10555556 | 0,1574704                  | 2,40921E-06                |
| 50,3                   | 13  | 0,53677932    | 0,346       |        | 0,18572565 | 0,28813204                 | 1,93224E-06                |
|                        |     | 0,3319498     | 0,226       | $\sum$ | 0,35406582 | 0,53185212                 | 7,42852E-06                |

Tabelle 5.2 ist ein Beispiel für eine *gute Tabelle*. Sie zeigt die gleichen Werte wie Tabelle 5.1, stellt diese allerdings übersichtlicher dar: die wichtigen Bereiche sind durch Trennstriche getrennt und an angemessenen Stellen wurden dicke/doppelte Linien verwendet, um zusätzliche Trennungen zu ermöglichen. Auf vertikale Linien wird zur Verbesserung der Lesbarkeit verzichtet. Die Messgrößen sind in der klar erkennbaren Kopfzeile hervorgehoben. Die Messwerte stehen von dieser ersten Zeile getrennt. Die Zahl der Ziffern der berechneten Größen orientiert sich an der Genauigkeit der Messwerte (ohne Rechengenauigkeit zu verschenken). Die letzte Zeile ist von den Messwerten getrennt, hervor- gehoben und nun eindeutig beschriftet. Die Beschreibung erläutert, woher die Messwerte stammen und um welche Größen es sich in den Spalten 6-8 und Zeile 6 handelt. Die Beschreibung ist zudem rein deskriptiv und wertet keines der Ergebnisse aus.

**Tabelle 5.2:** *Mit linearer Regression wird gemäß Gl. 2.7 die Steigung der Messwerte aus Tabelle 2.2 (hier Spalten 1, 2 und 4) berechnet.  $B_i$  entspricht den  $y$ -Werten, und es ist  $x_i = (2n + 1)/(|c_n - c_{-n}|)$ . In den drei rechten Spalten sind die für die Regression benötigten Hilfsgrößen eingetragen. In der letzten Zeile stehen Mittelwert der  $x$ - und  $B$ -Werte sowie die Summen der Hilfsgrößen.*

| $ c_n - c_{-n} $<br>mm | $n$ | $x_i$<br>1/mm | $B_i$<br>mm | --     | $x_i B_i$  | $x_i^2$<br>mm <sup>2</sup> | $d_i^2$<br>mm <sup>2</sup> |
|------------------------|-----|---------------|-------------|--------|------------|----------------------------|----------------------------|
| 113,9                  | 7   | 0,13169447    | 0,106       |        | 0,01395961 | 0,01734343                 | $1,74451 \cdot 10^{-6}$    |
| 80,0                   | 10  | 0,2625        | 0,186       |        | 0,048825   | 0,06890625                 | $1,34256 \cdot 10^{-6}$    |
| 88,2                   | 17  | 0,3968254     | 0,266       |        | 0,10555556 | 0,1574704                  | $2,40921 \cdot 10^{-6}$    |
| 50,3                   | 13  | 0,53677932    | 0,346       |        | 0,18572565 | 0,28813204                 | $1,93224 \cdot 10^{-6}$    |
| <b>Mittelwert:</b>     |     | 0,3319498     | 0,226       | $\sum$ | 0,35406582 | 0,53185212                 | $7,42852 \cdot 10^{-6}$    |

### 5.3. Abbildungen

Abbildungen in Form von Diagrammen und Graphen sind ein wichtiger Bestandteil des Protokolls. Physikalische Zusammenhänge lassen sich in Form von Kurven und Graphen oft anschaulicher darstellen als durch eine mathematische Formel allein. Zudem geben sie Hinweise auf die

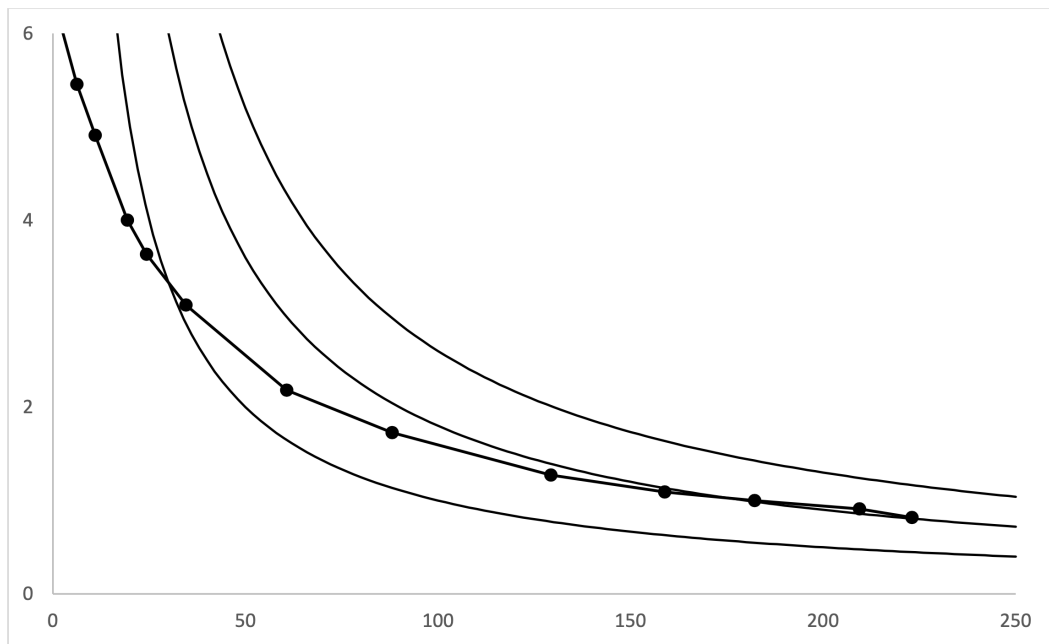
Größenordnung der Effekte oder nicht implizit gemessenes Verhalten: warum hat die Kurve wo ein Extremum? Nähert sich die Kurve vielleicht einer Asymptote an? Aber auch andere Abbildungen wie etwa die Versuchsskizze sind wichtig für das Protokoll. Bilder, die für das Ergebnis wichtig sind (z. B. Oszilloskopbilder), dürfen im Protokoll nicht fehlen.

Um Diagramme zu erstellen gibt es viele Möglichkeiten. Sei es über `matplotlib` in `python`, `gnuplot`, `labplot` oder zur Not `Excel`. Vor dem Erstellen überlege man sich den Wertebereich der Messwerte, den Messbereich. Die Kurve durchläuft *den gesamten Bereich* des gewählten Ausschnitts. Manchmal ist es sinnvoll, den Wertebereich einer Größe über den Messbereich hinaus zu wählen, um eine graphische Auswertung zu ermöglichen. Grundsätzlich sollte jedoch der beobachtete Sachverhalt dadurch gut zu erkennen sein, dass die Messwerte das Diagramm möglichst gut ausfüllen.

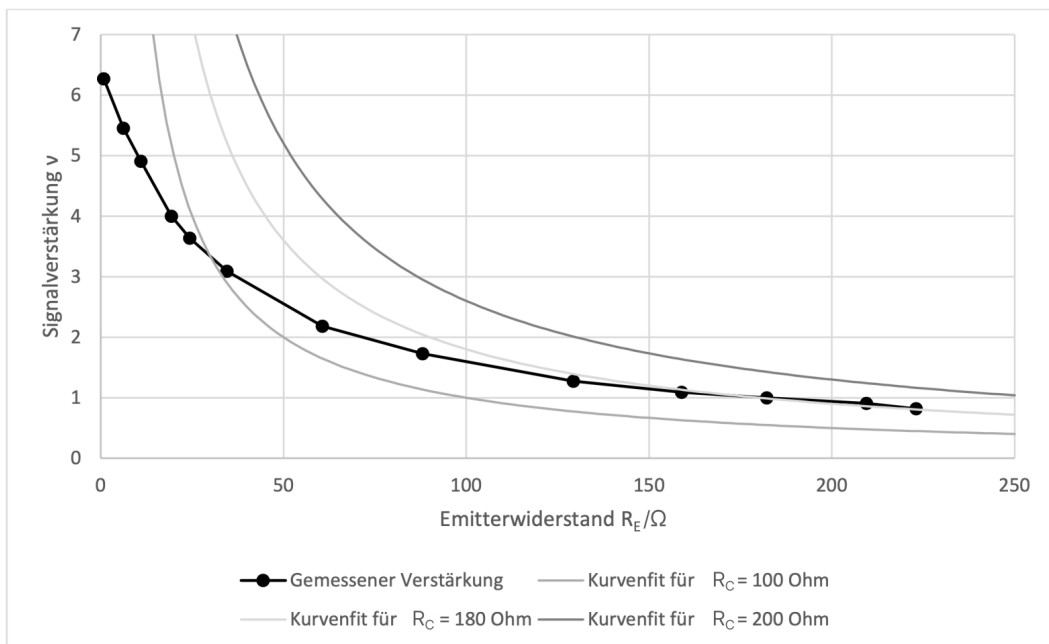
Alle Achsen des Diagramms müssen beschriftet werden. Zur Achsenbeschriftung gehören die Angabe der gemessenen Größe und die Einheit der aufgetragenen Messwerte sowie eine Zahlenskala an der Achse. Eine Achse muss nicht bei null beginnen, sondern kann auch bei anderen Werten starten. Dies wird durch die Beschriftung kenntlich gemacht. Es ist möglich, eine Achse logarithmisch zu skalieren, sodass die Messwerte auf einer logarithmisch geteilten Achse aufgetragen werden. Auch dies muss aus der Beschriftung deutlich werden. Bei mehreren Kurven in einem Diagramm sind diese zu beschriften oder zu nummerieren und in einer Legende zu erklären. Die Legende wird nach Möglichkeit noch in der Abbildung selbst platziert. Vermeiden Sie unnötige Boxen und Rahmen um Legenden.

Analog zu Tabellen erhalten auch Abbildungen eine Beschriftung. So ist die erste Abbildung von Versuch zwei mit „Abbildung 2.1“, die zweite mit „Abbildung 2.2“ usw. zu beschriften. Auch die Beschriftung von Abbildungen enthält eine Beschreibung: was ist zu sehen? Bei Diagrammen wird erläutert, welche Messwerte eingetragen sind, welche Größen auf den Achsen aufgetragen sind und woher die Messwerte stammen. Bei mehreren Kurven wird zudem erklärt, durch welchen Parameter sich die Kurven unterscheiden. Auch hier sollte die Beschreibung rein deskriptiv sein. Wie auch bei Tabellen kann im Text des Protokolls auf Abbildungen verwiesen werden.

Abbildung 5.1 zeigt ein Beispiel für eine schlechte Abbildung. Die Achsen des Diagramms sind nicht beschriftet und die Intervalle der Achsenbeschriftung sind viel zu groß gewählt, um einzelne Punkte präzise einem Wert zuzuordnen, insbesondere da die Achsen keine Einteilung besitzen. Das Fehlen von Gitterlinien erschwert dies zusätzlich. Dadurch, dass alle Geraden die gleiche Farbe besitzen und nicht beschriftet sind, wird nicht deutlich, welche Parameter die Diagramme repräsentieren. Da dies auch nicht in der Beschreibung erläutert wird, ist das Diagramm nicht verständlich. Hinzu kommt, dass die Beschreibung nicht erläutert, welche Daten aufgetragen sind und woher diese stammen. Stattdessen wird eine Deutung der Messwerte vorgenommen, was in einer Bildbeschreibung nicht geschehen soll.



**Abbildung 5.1:** Verstärkung des Stroms. Die Kurve für den Widerstand  $180\Omega$  nähert sich der Messkurve stärker an, weswegen man davon ausgehen kann, dass der Widerstand eben jene  $180\Omega$  betrug.



**Abbildung 5.2:** Verstärkung des Ausgangssignals. Aufgetragen ist der Verstärkungsfaktor  $\nu$  gegen den gewählten Emitterwiderstand  $R_E$  in Ohm. Die Punkte stellen die Werte aus Tabelle „X.Y“ dar, die breite Kurve die Verbindung dieser Messwerte. Die drei feineren Kurven sind Fitkurven erstellt gemäß Gleichung „N.M“. Sie unterscheiden sich durch den Parameter  $R_C$ , den Kollektorwiderstand. Die gewählten  $R_C$ -Werte sind  $100\Omega$ ,  $180\Omega$  und  $200\Omega$ .

Abb. 5.2 hingegen zeigt eine vorbildliche Abbildung. Die Achsen sind beschriftet mit der Messgröße sowie der Einheit der aufgetragenen Werte. Durch die Gitterlinien und die genauere Einteilung der Achsen können Punkte auf den Kurven besser ausgewertet werden. Die unterschiedlichen Grautöne der Kurven ermöglicht eine Unterscheidung und die Legende erläutert, durch welchen

Parameter (in diesem Fall ein Widerstand  $R_C$ ) sich die Kurven unterscheiden. Die Beschreibung erläutert, welche Größen aufgetragen sind, woher die Werte der Messkurve stammen, nach welcher Formel die anderen drei Kurven angelegt wurden und durch welchen Parameter in dieser Formel sie sich unterscheiden. So wird auch ersichtlich, dass tatsächlich nur eine der vier Kurven von Messwerten stammt, während die anderen theoretische Kurven sind, die aus einer Formel ermittelt wurden. Dies war in Abb. 5.1 keinesfalls erkennbar. Die Beschreibung von Abb. 5.2 bewertet das Ergebnis zudem nicht.

## 5.4. Gleichungen

Gleichungen (Formeln und Berechnungen) werden in einem eigenen Absatz und leicht eingerückt dargestellt. In diesem Heft finden Sie diverse Beispiele hierfür. Zudem erhält jede Gleichung eine Nummer. Idealerweise hat diese ein ähnliches Format wie die Beschriftung von Tabellen und Abbildungen, also „Gleichung 2.1“, oder „Gl. 2.2“ usw. Wird eine Gleichung für die Berechnung einer Größe verwendet, so muss sie nicht erneut aufgeschrieben werden, sondern kann mithilfe dieser Nummer referenziert werden. Gleichungen sollten gut lesbar geschrieben werden und alle darin vorkommenden Größen müssen im Text erläutert werden. Achten Sie darauf, dass alle Größen eindeutig definiert sind, besonders wenn Größen ähnlicher Bezeichnung auftauchen. Bei Winkeln und Längenmaßen vermeidet eine Skizze viele Missverständnisse.

## 5.5. Fehlerrechnung

Jede Messung ist mit Unsicherheiten behaftet, die in die Rechnung einfließen müssen.

- Legen Sie die Unsicherheit jeder Messgröße fest. Bei wiederholten Messungen bestimmen Sie sie aus der statistischen Streuung (Standardabweichung des Mittelwerts). Ist das nicht sinnvoll möglich, verwenden Sie die Geräteunsicherheit oder schätzen Sie sie über die Least Significant Digit (LSD) bzw. sichtbare Schwankung ab.
- Dokumentieren Sie alle berücksichtigten Unsicherheiten, auch die der Eingangsdaten. Unsicherheiten einzelner Größen dürfen nur mit angegebener Begründung weggelassen werden.
- Bestimmen Sie die Unsicherheiten berechneter Ergebnisse mit dem Fehlerfortpflanzungsgesetz.

## 5.6. Regressionsrechnung

- Geben Sie den Ansatz der Geradengleichung an und ordnen Sie Steigung, Achsenabschnitt, Regressor ( $x$ -Wert) und Regressand ( $y$ -Wert) Größen des Experiments zu.
- Stellen Sie die berechnete Gerade zusammen mit den Datenpunkten graphisch dar.
- Geben Sie auch die Unsicherheiten der aus der Regression erhaltenen Größen an.

## 5.7. Ergebnisse

Ergebnisse von Rechnungen sind für gewöhnlich physikalische Größen oder Hilfsgrößen. Welche Größen bei einem Versuch berechnet werden sollen, ergibt sich aus dem Anleitungsheft (außer bei Offenen Experimenten). Sobald ein Ergebnis feststeht, muss es im Text der Auswertung präsentiert werden. Zu diesem Zweck wird das Ergebnis (ähnlich wie Gleichungen) eingerückt in eine eigene Zeile geschrieben. Dabei besteht die Darstellung des Ergebnisses aus dem Formelzeichen

der berechneten Größe, dem ermittelten Mittelwert, dem absoluten Fehler (der stets mit anzugeben ist!) und dem relativen Fehler. Endergebnisse ohne Unsicherheit sind nur nach Absprache zulässig. Dies kann in einer der folgenden Formen geschehen:

$$G = \overline{G} \pm s_{\overline{G}} \left( \pm \frac{s_{\overline{G}}}{\overline{G}} \right), \quad (5.1)$$

$$G = \overline{G} \pm s_{\overline{G}} = \overline{G} \left( 1 \pm \frac{s_{\overline{G}}}{\overline{G}} \right). \quad (5.2)$$

Zusätzlich wird das Ergebnis durch Unterstreichung vom restlichen Text abgesetzt. Ein einfaches Beispiel für eine ermittelte Feldstärke  $E$  mit  $\overline{E} = 5 \text{ V/m}$  und  $s_{\overline{E}} = 0,25 \text{ V/m}$  sähe dann so aus:

$$\underline{\underline{E = 5 \text{ V/m} \pm 0,25 \text{ V/m} (\pm 5\%)},} \quad (5.3)$$

$$\underline{\underline{E = (5 \pm 0,25) \text{ V/m} = 5(1 \pm 0,05) \text{ V/m}.}} \quad (5.4)$$

Es kann in der Auswertung durchaus geschehen, dass Ergebnisse von Rechnungen unphysikalische Ergebnisse liefern, z. B. negative Massen. Dies gehört zum Experimentieren dazu; nicht jede Messung gelingt mit ausreichender Genauigkeit. In diesem Fall sollten Sie Ihre Rechnung erneut überprüfen. Sind Sie sich sicher, dass Ihre Rechnungen korrekt sind, geben Sie das Ergebnis trotzdem wie gewohnt an. Machen Sie deutlich, dass dieses Ergebnis unphysikalisch ist, beispielsweise durch eine farbige Kennzeichnung. Kommentieren Sie das Ergebnis umgehend und erläutern Sie, warum dieser Wert unphysikalisch ist. Sie können auch auf mögliche Ursachen für den Fehler eingehen. Diskutieren Sie unphysikalische Ergebnisse unbedingt auch ausführlich in Ihrer Fehlerdiskussion!

## 5.8. Messwerte

Bei jeder Messung wird die zu bestimmende *physikalische Größe* mit einem *Einheitsmaß* verglichen. Das Einheitsmaß muss zuvor definiert worden sein. Das Messresultat kann daher durch eine mit der entsprechenden Dimension versehenen Zahl angegeben werden. Man schreibt das Ergebnis einer Messung oder Rechnung immer als Produkt aus *Zahlenwert* und *Einheit* (das Multiplikationszeichen wird weggelassen).

### Beispiel:

$$\text{Brennweite einer Linse} = 1,51 \text{ Meter} \quad \text{oder} \quad f = 1,51 \text{ m}.$$

Dabei ist „f“ das Formelzeichen für die physikalische Größe „Brennweite“, „1,51“ ist der Zahlenwert, und „m“ ist das Einheitenzeichen für die Einheit „Meter“.

*Einheiten* für physikalische Größen legt das Internationale Einheitensystem (**SI**) fest. Das Fundament des neuen internationalen Einheitensystems sind sieben festgelegte Naturkonstanten. Das Definitionskonzept folgt dabei folgendem Schema: Die Konstante X hat den Zahlenwert Y, wenn man sie in SI-Einheiten ausdrückt.

#### Definition:

Das *internationale Einheitensystem* **SI** ist dasjenige Einheitensystem, in dem

- die Frequenz des Hyperfeinstrukturübergangs des Grundzustands im  $^{133}\text{Cs}$ -Atom  $\Delta\nu_{\text{Cs}} = 9\,192\,631\,770 \text{ Hz}$  ( $\text{Hz} = \text{s}^{-1}$ ),
- die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum  $c = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}$ ,
- die Planck-Konstante  $h = 6,626\,070\,15 \times 10^{-34} \text{ J s}$  ( $\text{J s} = \text{kg m}^2 \text{ s}^{-1}$ ),

- die Elementarladung  $e = 1,602\,176\,634 \times 10^{-19} \text{ C}$  ( $\text{C} = \text{As}$ ),
- die Boltzmann-Konstante  $k_{\text{B}} = 1,380\,649 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$  ( $\text{J K}^{-1} = \text{kg m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ K}^{-1}$ ),
- die Avogadro-Konstante  $N_{\text{A}} = 6,022\,140\,76 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ ,
- das Photometrische Strahlungsäquivalent  $K_{\text{cd}}$  einer monochromatischen Strahlung von  $540 \times 10^{12} \text{ Hz}$   $K_{\text{cd}} = 683 \text{ lm W}^{-1}$  ( $\text{lm W}^{-1} = \text{lm m}^2 \text{ kg s}^{-3}$ ,  $\text{lm} = \text{cd sr}$ ) beträgt.

Das ist die eigentliche Definition des internationalen Einheitensystems (SI).

Auf der Grundlage dieser so festgelegten Naturkonstanten werden die sieben SI-Basiseinheiten definiert. Jede Basiseinheit ist durch ihre Definition eng verknüpft mit einer dieser sieben Naturkonstanten; weitere Basiseinheiten aus dem Pool der sieben Basiseinheiten können jeweils zur Definition hinzukommen.

Die sieben Basiseinheiten sind:

1. Die **Sekunde**, Einheitenzeichen s, ist die SI-Einheit der Zeit. Sie ist definiert, indem für die Cäsiumfrequenz  $\Delta\nu_{\text{Cs}}$ , der Frequenz des ungestörten Hyperfeinübergangs des Grundzustands des Cäsiumatoms 133, der Zahlenwert 9 192 631 770 festgelegt wird, ausgedrückt in der Einheit Hz, die gleich  $\text{s}^{-1}$  ist.
2. Der **Meter**, Einheitenzeichen m, ist die SI-Einheit der Länge. Er ist definiert, indem für die Lichtgeschwindigkeit in Vakuum  $c$  der Zahlenwert 299 792 458 festgelegt wird, ausgedrückt in der Einheit  $\text{m s}^{-1}$ , wobei die Sekunde mittels  $\Delta\nu_{\text{Cs}}$  definiert ist.
3. Das **Kilogramm**, Einheitenzeichen kg, ist die SI-Einheit der Masse. Es ist definiert, indem für die Planck-Konstante  $h$  der Zahlenwert  $6,62607015 \times 10^{-34}$  festgelegt wird, ausgedrückt in der Einheit Js, die gleich  $\text{kg m}^2 \text{ s}^{-1}$  ist, wobei der Meter und die Sekunde mittels  $c$  und  $\Delta\nu_{\text{Cs}}$  definiert sind.
4. Das **Ampere**, Einheitenzeichen A, ist die SI-Einheit der elektrischen Stromstärke. Es ist definiert, indem für die Elementarladung  $e$  der Zahlenwert  $1,602176634 \times 10^{-19}$  festgelegt wird, ausgedrückt in der Einheit C, die gleich As ist, wobei die Sekunde mittels  $\Delta\nu_{\text{Cs}}$  definiert ist.
5. Das **Kelvin**, Einheitenzeichen K, ist die SI-Einheit der thermodynamischen Temperatur. Es ist definiert, indem für die Boltzmann-Konstante  $k$  der Zahlenwert  $1,380649 \times 10^{-23}$  festgelegt wird, ausgedrückt in der Einheit  $\text{J K}^{-1}$ , die gleich  $\text{kg m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ K}^{-1}$  ist, wobei das Kilogramm, der Meter und die Sekunde mittels  $h$ ,  $c$  und  $\Delta\nu_{\text{Cs}}$  definiert sind.
6. Das **Mol**, Einheitenzeichen mol, ist die SI-Einheit der Stoffmenge. Ein Mol enthält genau  $6,02214076 \times 10^{23}$  Einzelteilchen. Diese Zahl entspricht dem für die Avogadro-Konstante  $N_{\text{A}}$  geltenden festen Zahlenwert, ausgedrückt in der Einheit  $\text{mol}^{-1}$ , und wird als Avogadro-Zahl bezeichnet.  
Die Stoffmenge, Zeichen  $n$ , eines Systems ist ein Maß für eine Zahl spezifizierter Einzelteilchen. Bei einem Einzelteilchen kann es sich um ein Atom, ein Molekül, ein Ion, ein Elektron, ein anderes Teilchen oder eine Gruppe solcher Teilchen mit genau angegebener Zusammensetzung handeln.
7. Die **Candela**, Einheitenzeichen cd, ist die SI-Einheit der Lichtstärke in einer bestimmten Raumrichtung. Sie ist definiert, indem für das photometrische Strahlungsäquivalent  $K_{\text{cd}}$  der monochromatischen Strahlung der Frequenz  $540 \times 10^{12} \text{ Hz}$  der Zahlenwert 683

festgelegt wird, ausgedrückt in der Einheit  $\text{lm W}^{-1}$ , die gleich  $\text{cd sr W}^{-1}$  oder  $\text{cd sr kg}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ s}^3$  ist, wobei das Kilogramm, der Meter und die Sekunde mittels  $h$ ,  $c$  und  $\Delta\nu_{\text{Cs}}$  definiert sind.

**Tabelle 5.3:** Die SI-Basiseinheiten.

| Basisgröße  | Symbol         | Basiseinheit | Zeichen | definierende Naturkonstante                                                  | impliz. verwendet             |
|-------------|----------------|--------------|---------|------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------|
| Zeit        | $t$            | Sekunde      | s       | $\Delta\nu_{\text{Cs}} = 9\,192\,631\,770\text{s}^{-1}$                      |                               |
| Länge       | $l$            | Meter        | m       | $c = 299\,792\,458\text{ m s}^{-1}$                                          | $\Delta\nu_{\text{Cs}}$       |
| Masse       | $m$            | Kilogramm    | kg      | $h = 6,626\,070\,15 \times 10^{-34}\text{ J s}$                              | $c, \Delta\nu_{\text{Cs}}$    |
| Stromstärke | $I$            | Ampère       | A       | $e = 1,602\,176\,634 \times 10^{-19}\text{ As}$                              | $\Delta\nu_{\text{Cs}}$       |
| Temperatur  | $T$            | Kelvin       | K       | $k = 1,380\,649 \times 10^{-23}\text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ K}^{-1}$ | $h, c, \Delta\nu_{\text{Cs}}$ |
| Stoffmenge  | $n$            | Mol          | mol     | $N_{\text{A}} = 6,022\,140\,76 \times 10^{23}\text{ mol}^{-1}$               |                               |
| Lichtstärke | $I_{\text{v}}$ | Candela      | cd      | $K_{\text{cd}} = 683\text{ cd sr kg}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ s}^3$        | $h, c, \Delta\nu_{\text{Cs}}$ |

Die Einheitenzeichen kennen keinen Plural, weisen keinen Abkürzungspunkt auf und sind in der Regel Kleinbuchstaben, die von einem Personennamen abgeleiteten beginnen mit einem Großbuchstaben: m, kg, s, aber K (nach Kelvin) und T (nach Tesla). Eine Ausnahme ist das Liter (L).

Alle anderen Größen können von den sieben Basiseinheiten oder den sieben Naturkonstanten abgeleitet werden. Damit erübrigt sich eigentlich die Unterscheidung zwischen Basiseinheiten und abgeleiteten Einheiten, da man alle Einheiten über die festgelegten Konstanten ableiten kann.

*Abgeleitete SI-Einheiten* haben eigene Namen und Zeichen. Die SI-Einheiten bilden ein kohärentes Einheitensystem, d.h. daraus abgeleitete *Einheiten* sind Produkte oder Quotienten der *Basiseinheiten*, ohne dass weitere Zahlenfaktoren bei der Umrechnung erscheinen. Beispiele:

Kraft, gemessen in Newton:  $1\text{ N} = 1\text{ kg m s}^{-2}$ ,

Druck, gemessen in Pascal:  $1\text{ Pa} = 1\text{ N m}^{-2} = 1\text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-2}$ .

Es gibt Einheiten außerhalb des SI-Systems, die weit verbreitet sind (Minute, Stunde, Hektar, Tonne, Liter, Bar, Parsec, Elektronenvolt...). Außerdem werden noch Einheiten aus dem Zentimeter-Gramm-Sekunde-System (cgs-System) benutzt.

Die *Dimension* einer physikalischen Größe ist ihre Darstellung als Produkt von Basisgrößen. Will man nur die Einheiten einer Größe angeben, nicht aber ihren Zahlenwert, so verwendet man eckige Klammern:

$$[\text{Druck}] = \left[ \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}} \right] = \left[ \frac{F}{A} \right] = \left[ \frac{ma}{A} \right] = \left[ \frac{\text{MLT}^{-2}}{\text{L}^2} \right] = \left[ \frac{\text{M}}{\text{LT}^2} \right] = \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}^2} = \text{Pa}.$$

Die Dimension des Drucks ist also „Masse durch Länge durch Zeitquadrat“. Die Einheit des Drucks ist Pascal. Solche Angaben sind oft nützlich zum Überprüfen einer Rechnung.

*Dimensionslose Größen* haben lediglich einen Zahlenwert (z. B. der Brechungsindex  $n$ ).

Die Rechenregeln für mathematische Grundoperationen gelten auch für Einheiten. Man sollte auf einen Abstand zwischen den Einheitenzeichen achten; sonst kann man nicht zwischen dem Produkt von Einheiten und Einheiten mit Vorsilbe unterscheiden.

Beispiel:

mN = Millinewton (Kraft),

m·N = Meter mal Newton (Drehmoment).

**Tabelle 5.4:** *Dezimale Vorsätze von Einheiten.*

| Vorsatz | Abkürzung | Faktor    | Vorsatz | Abkürzung | Faktor     |
|---------|-----------|-----------|---------|-----------|------------|
| Deka    | da        | $10^1$    | Dezi    | d         | $10^{-1}$  |
| Hekto   | h         | $10^2$    | Zenti   | c         | $10^{-2}$  |
| Kilo    | k         | $10^3$    | Milli   | m         | $10^{-3}$  |
| Mega    | M         | $10^6$    | Mikro   | $\mu$     | $10^{-6}$  |
| Giga    | G         | $10^9$    | Nano    | n         | $10^{-9}$  |
| Tera    | T         | $10^{12}$ | Piko    | p         | $10^{-12}$ |

Die vorstehende Tab. 5.4 zeigt international eingeführte *Vorsätze* für Einheiten. Sie bezeichnen dezimale Bruchteile oder Vielfache einer Einheit.

Eine Kombination aus Vorsatz- und Einheitenzeichen gilt als neues Kurzzeichen. Das erspart die Verwendung von Klammern, wenn die Kombination potenziert wird.

Beispiel:

$$\text{cm}^2 \text{ bedeutet } \text{cm} \cdot \text{cm} = (\text{cm})^2 = (0,01\text{m})^2 = \text{Quadratzentimeter}.$$

Ausnahme: Vorsätze für Masse werden nicht auf die Basiseinheit kg, sondern auf die Einheit g bezogen - also Mikrogramm ( $\mu\text{g}$ ), nicht Nanokilogramm (nkg). Die Vorsätze werden verwendet, um sehr große oder sehr kleine Werte übersichtlich darzustellen.

In wissenschaftlicher Notation wird die Zehnerpotenz so gewählt, dass das Dezimalkomma auf die erste Ziffer von links folgt; alternativ kann die Größenordnung durch einen Einheitenvorsatz ausgedrückt werden. z. B.:

$$\text{Ruhemasse des Protons: } m_p = 1,6726 \times 10^{-27} \text{ kg}.$$

In der numerischen Darstellung einer physikalischen Größe ist die letzte angegebene Ziffer die letzte Stelle, die noch Information trägt. Die Unsicherheit wird gemäß DIN 1333 (siehe unten) an derselben Stelle angegeben.

In Abbildungen werden Einheiten mit „in EINHEIT“, „(EINHEIT)“ oder „/ EINHEIT“ angegeben.

### SI-konforme Darstellung von Zahlen und Einheiten mit siunitx

Zahlenwerte und Einheiten können SI-konform (z. B. halbes Leerzeichen zwischen Zahl und Einheit) mit dem **siunitx**-Paket verwendet werden. Wie z. B.:  $N = \text{kg m/s}^2$ , Zahlen ohne Einheiten  $9,99 \pm 0,09$  oder Zahlen deren Genauigkeitsbereich gerundet werden muss  $12,35 \text{ kJ}$ . Mehr Infos entnehmen Sie der Dokumentation auf <https://ctan.org/pkg/siunitx?lang=de>. Auf <https://ctan.org/> lässt sich zu allen L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X-Paketen detaillierte Dokumentation finden.

Wenn wir an dieser Stelle Werte errechnet haben, geben wir diese auch ordnungsgemäß gerundet, inklusive Vertrauensbereich und Einheit an:

$$\lambda = (1,23 \pm 0,23) \text{ nm}$$

Und auch sowieso wird das Kommatrennzeichen gut erkannt, wie beim Beispiel  $0,1234$  bzw.  $2,00 \pm 0,12$  gut zu sehen ist. Auch Wertebereiche lassen sich so gut darstellen, wobei  $x$  Werte von  $10 \text{ cm}$  bis  $20 \text{ cm}$  annimmt. Natürlich können auch (längere) Listen, wie z.B.  $10 \text{ kg s}^{-2}$ ,  $20 \text{ kg s}^{-2}$ ,  $30 \text{ kg s}^{-2}$ ,  $40 \text{ kg s}^{-2}$  und  $50 \text{ kg s}^{-2}$ , sehr einfach dargestellt werden.

Dass es wichtig sein kann, auf reguläre bzw. kursive Schreibweise zu achten, lässt sich am Beispiel

$$\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6} \text{ N/A}^2 \quad \text{bzw.} \quad (5.5)$$

$$L = \frac{\mu_0 \mu_r N^2 A}{l} \quad (5.6)$$

gut erkennen. Hier ist  $\mu_0$  die magnetischen Feldkonstante.  $L$  beschreibt die Induktivität einer Spule der Länge  $l$  mit einer Querschnittsfläche  $A$  und  $N$  Windungen.

## 5.9. Runden nach DIN 1333

Zwar sollte immer mit ungerundeten Werten gerechnet werden, aber beim Niederschreiben der Ergebnisse, sollten diese sinnvoll gerundet werden, um die Übersichtlichkeit zu verbessern. Schlechte Formatierung und zu viele Nachkommastellen wirken dabei wie Rauschen auf den Daten, z. B. wenn im Fließtext so etwas wie  $v = 0,35673434565467$  Meter pro Sekunde mit einem Fehler von  $s_x = 0,023456734534567$  Meter pro Sekunde geschrieben steht. Stattdessen könnte auch eine übersichtliche Form wie

$$v = (0,357 \pm 0,024) \text{ m/s}$$

genutzt werden. Auch in Tabellen ist das Darstellen von zu vielen Nachkommastellen unerwünscht! Es gibt verschiedene Normen zum Runden. Eine davon (recht einfache) ist die DIN 1333, welche in drei simplen Schritten abläuft. Gegeben sei ein Wert  $x$  mit einer Unsicherheit von  $\Delta x$ , dann:

1. Rundestelle finden. Die Rundestelle ist die erste von 0 verschiedene Ziffer  $z$  der Unsicherheit  $\Delta x$ . Sollte  $z$  eine 1 oder 2 sein, dann eine Stelle rechts daneben, jedoch nie mehr als 2 Stellen.
2. Der Fehler wird **immer** aufgerundet.
3. Der Wert wird an der Rundestelle gerundet: Bei 0 bis 4 wird abgerundet, bei 5 bis 9 wird aufgerundet.

Hierzu einige Beispiele in denen die Rundestelle unterstrichen dargestellt und korrekt gerundet wurde:

$$x = (1, 23456 \pm 0, \underline{3}4567) \text{ m} \approx (1,2 \pm 0,4) \text{ m} \quad (5.7)$$

$$x = (0, 0001234567 \pm 0, 00000\underline{3}45) \text{ m} \approx (123 \pm 4) \mu\text{m} \quad (5.8)$$

$$x = (1, 234567 \pm 0, 02\underline{3}4567) \text{ m} \approx (1235 \pm 24) \text{ mm} \quad (5.9)$$

$$x = (12, 3456 \pm 1, \underline{1}4567) \text{ m} \approx (12,3 \pm 1,2) \text{ m} \quad (5.10)$$

$$x = (1234, 567 \pm \underline{7}45, 67) \text{ m} \approx (1,2 \pm 0,8) \text{ km} \quad (5.11)$$

$$x = (0, 1234567 \pm 0, 00099\underline{5}67) \text{ m} \approx (123,5 \pm 1,0) \text{ mm} \quad (5.12)$$

Besonders bemerkenswert sind hierbei die letzten 2 gerundeten Unsicherheiten. In [Gleichung 5.11](#) wurde die Zehnerpotenz absichtlich verschoben, um Nullen zu vermeiden (also 0,8 km anstatt von 800 m), die keine Informationen tragen. Hingegen wurde im letzten Beispiel ([Gleichung 5.12](#)) gerundet eine Null mitgeführt, welche Information trägt und die Rundestelle erhält (sonst würde sie künstlich nach links verschoben werden).

## 6. Checkliste

Sie sollten nun in der Lage sein, die folgenden Fragen beantworten zu können. Falls nicht, finden Sie hinter den Fragen die Abschnitte, in denen Sie die Antworten finden können:

- Wozu dient das Praktikum? (Abs. 2)
- Wie bereitet man sich auf die Praktikumsversuche vor? (Abs. 2.2)
- Wozu dienen die Versuchsvorbesprechungen, und wie laufen sie ab? (Abs. 2.3)

### Praktikums- und Hausordnung

- Darf man in den Praktikumsräumen essen, trinken oder rauchen? (Abs. 2.7)
- Wer haftet im Praktikum wofür? (Abs. 2.3)
- Wer baut den Versuch auf? (Abs. 2.3)
- Wann darf mit der Versuchsdurchführung begonnen werden? (Abs. 2.3)
- In welchen Fällen darf man einen Versuch nicht durchführen? (Abs. 2.3, Abs. 2.4)
- Darf im Praktikum zusammen gearbeitet werden? (Abs. 2.3)

### Schein, Testate

- Was ist das Vortestat und wann bekommt man es? (Abs. 2.3)
- Wann muss die Versuchsauswertung vorgelegt werden? (Abs. 2.3)
- Unter welchen Voraussetzungen gibt es Zwischen- und Endtestate? (Abs. 2.3)
- In welchen Fällen erhält man kein Testat? (Abs. 2.3)
- Unter welchen Voraussetzungen und wann erhält man den Praktikumsschein? (Abs. 2.3)

### Das Versuchsprotokoll

- Wie ist die schriftliche Vorbereitung anzulegen? (Abs. 3.2)
- Was gehört alles zu einem Versuchsprotokoll? (Abs. 5)
- Welche Anforderungen werden gestellt an: Protokollheft, Versuchsaufbauskitze, Messwerte, Tabellen, Beschreibung von Aufbau & Durchführung, grafische Darstellung der Messergebnisse, Versuchsauswertung, Zusammenfassung & Diskussion? (Abs. 5)

### Fehlerrechnung (für alle Fragen: Abs. 4)

- Wie verhält sich das Ergebnis einer Messung zum wahren Wert der physikalischen Größe?
- Was sind absoluter und relativer Fehler?
- Was versteht man unter systematischen und zufälligen (statistischen) Fehlern?
- Wie sind zufällige Fehler gewöhnlich verteilt?
- Was sind Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung?
- Was ist das arithmetische Mittel von Messwerten, und wie verhält es sich zum wahren Wert der gemessenen physikalischen Größe?
- Wie berechnet man die Standardabweichung der Einzelmessung, und wie die Standardabweichung des Mittelwertes?
- Wie weit sollte man den zufälligen Fehler durch eine große Zahl von Messungen reduzieren?

- Was gibt die Fehlerklasse eines Messgerätes an?
- Wie genau misst ein Digitalmultimeter?
- Wozu braucht man das Gauß'sche Fehlerfortpflanzungsgesetz?
- Wie lautet das Gauß'sche Fehlerfortpflanzungsgesetz allgemein?
- Wie wendet man das Gauß'sche Fehlerfortpflanzungsgesetz konkret an?
- Wann und wozu wendet man das Verfahren der linearen Regression an?
- Was ist die bestmögliche Ausgleichsgerade durch gegebene Messwertpaare?
- Wie führt man die lineare Regression durch?

## A. Bedienung von Oszilloskop und Frequenzgenerator

Sehen Sie hierzu auch das entsprechende Video im Online-Vorbereitungskurs auf Moodle oder unter [Lecture2Go](#).

### A.1. Oszilloskop Tektronix TDS 2002B

Ein Oszilloskop ermöglicht die Darstellung des zeitlichen Verlaufes einer Spannung. Das Tektronix TDS 2002B ist ein digitales Oszilloskop. Im Vergleich zu analogen Oszilloskopen erfolgt der Bildaufbau nicht über eine Elektronenstrahlröhre, sondern digital über ein LCD-Display. Die Digitalisierung ermöglicht eine Reihe neuer Funktionen. Hier werden die Bedienung und für das Praktikum relevante Hilfsmittel erläutert.

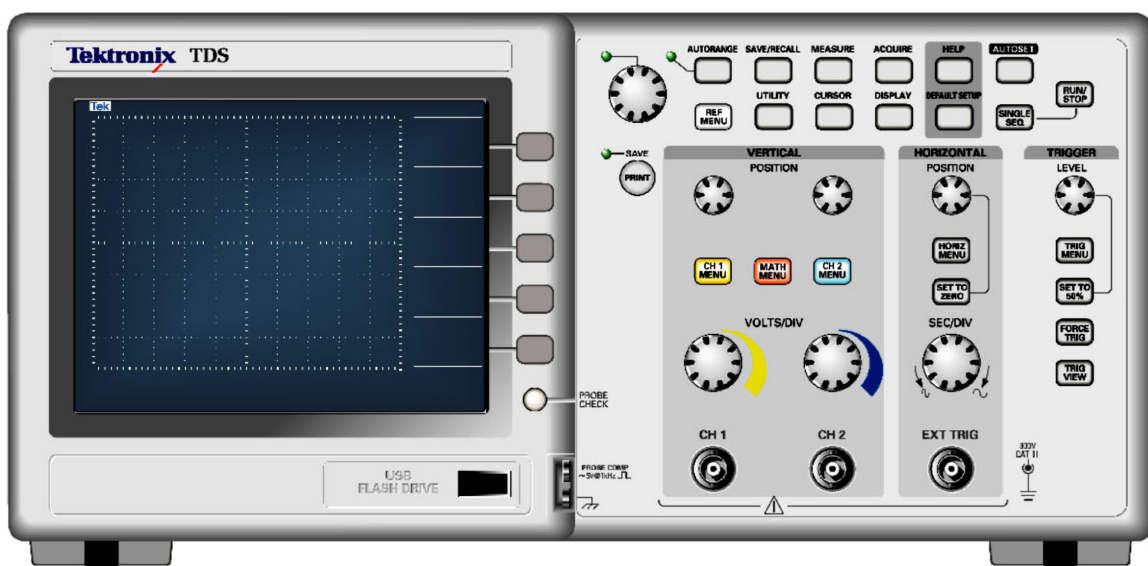
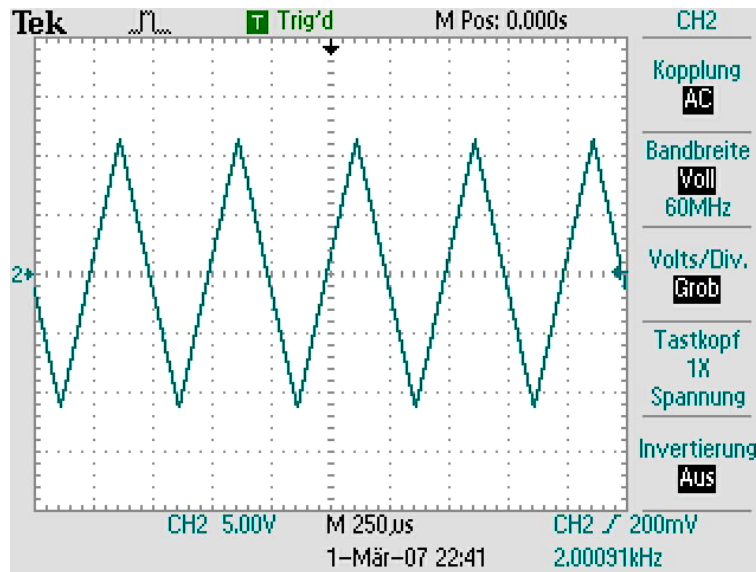


Abbildung A.1: Frontansicht des Oszilloskops Tektronix TDS 2002B.

Abb. A.1 zeigt die Front des TDS 2002B; sie besteht aus zwei Teilen: Links befindet sich der Bildschirm. Rechts daneben befinden sich 5 Multifunktionstasten, deren Wirkung vom jeweils auf den Bildschirm angezeigten Menü bestimmt wird. Der rechte Teil besteht aus zwei BNC Kanaleingängen (CH1 und CH2), dem Triggereingang (EXT TRIG) sowie den Steuerelementen. Zudem verfügt das Oszilloskop über einen USB-Flash-Drive Anschluss, der es ermöglicht die Bildschirmdarstellung abzuspeichern oder an einem angeschlossenen Drucker auszudrucken.



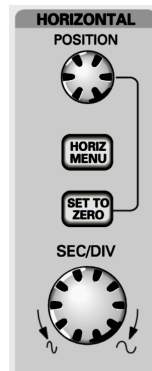
**Abbildung A.2:** Bildschirmdarstellung von TDS 2002B mit einem an Kanal 2 angelegten Testsignal: 1-3: Systemparameterangaben; 4-8 Einstellmöglichkeiten an Kanal 2 mittels der Multifunktionstasten

#### A.1.1. Bildschirmdarstellung

Abb. 5.3 zeigt den Bildschirm mit einem an Kanal 2 angelegten Testsignal. Die Bildschirmdarstellung ist farbig (Kanal 1: Gelb, Kanal 2: Blau, "Mathematik": Rot). Es bezeichnen

- Parameter der Zeitsteuerung. Der schwarze Pfeil markiert die Zeitverschiebung, „M Pos“ gibt sie an: hier 0 Sekunden. Zudem gibt M die Zeitbasis an. Hier entspricht der horizontale Abstand zweier grau gepunktter Gitternetzlinien  $250 \mu\text{s}$ .
- Parameter von Kanal 2. Der blaue Pfeil mit einer „2“ markiert den Offset von Kanals 2, hier: 0 V. Zudem wird die Signalverstärkung angezeigt; hier 5 V/div.
- Triggerparameter. Der blaue Pfeil zeigt das Spannungsniveau an, auf das getriggert wird. Hier wird auf das Niveau 200 mV, mit dem Triggertyp „Flanke“ auf Kanal 2 getriggert (vgl. erste Textzeile). Die zweite Textzeile zeigt die Triggerfrequenz an.
- Die Kopplung kann zwischen „AC“, „DC“ und „Ground“ gewechselt werden.
- Die Bandbreite kann zwischen 20 MHz und 60 MHz variiert werden.
- Volts/Div. Kann zwischen „Grob“ und „Fein“ geschaltet werden. Dies ändert den Einfluss einer Drehung am Knopf über dem Eingang von Kanal 2 auf die Veränderung des Spannungsmessbereiches.
- Tastkopf: Ermöglicht die Verwendung eines Spannungsteilers. Das Tastkopfverhältnis soll im Praktikum auf „1X“ eingestellt sein.
- Schaltet die Invertierung „Ein“ oder „Aus“.

### A.1.2. Steuerung der Zeitbasis („Horizontal Position“)



**Abbildung A.3:** Bildschirmdarstellung von TDS 2002B mit einem an Kanal 2 angelegten Testsignal: 1-3: Systemparameterangaben; 4-8 Einstellmöglichkeiten an Kanal 2 mittels der Multifunktionstasten

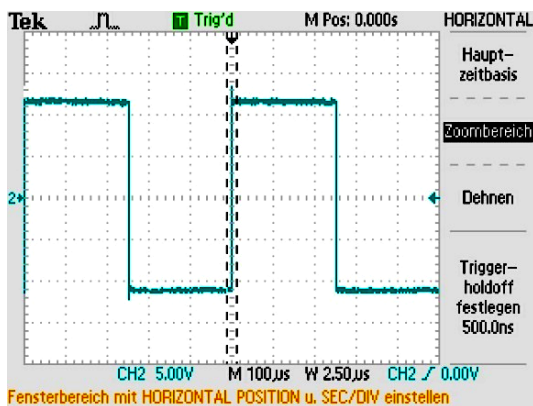
„POSITION“-Knopf: Verändert die Zeitverschiebung

„HORIZ MENU“-Taste: Ruft das Horizontalmenü auf

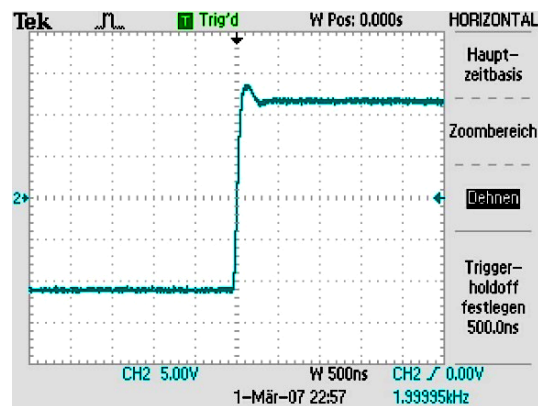
„SET TO ZERO“-Taste: Setzt die Zeitverschiebung auf 0 s zurück.

„SEC/DIV“-Knopf: Verändert stufenweise der Zeitbasis zwischen 2,5 ns und 50 s

Als Beispiel zeigt Abb. A.4 eine Steuerung der Zeitachse: „Dehnen“ nach der Betätigung der Taste „HORIZ MENU“:



(a) Nicht so stark hereingezoomt.



(b) Stärker hereingezoomt.

**Abbildung A.4:** Zoomen der Zeitachse.

### A.1.3. Steuerung der Y-Achse („Vertical Position“)



Abbildung A.5: Steuerung der Y-Achse.

Die Steuerung der Y-Achse (Abb. 7.5) ermöglicht eine Auswahl der Kanäle, des Mathematik-Modus sowie deren Steuerung.

Die „POSITION“-Knöpfe verschieben das Signal in vertikaler Richtung (Offset-Steuerung) für den jeweiligen Kanal.

Das Drücken der „CH1 MENU“ bzw. „CH2 MENU“-Tasten aktiviert die entsprechenden Kanäle auf der Bildschirmdarstellung (Abb. 7.2). Erneutes Drücken deaktiviert diese Kanäle.

Die „MATH MENU“-Taste schaltet mathematische Funktionen, z. B.  $CH1+CH2$ ,  $CH1-CH2$ ,  $FFT(CH1)$  ein und aus.

Das Drehen der Volts/Div Knöpfe stellt die Verstärkung des Signals grob bzw. fein (Abb. 7.2) ein. Der vertikale Abstand zweier Gitternetzlinien kann so zwischen 5 V und 2 mV eingestellt werden. Bei der Einstellung 2 mV/Div wird die Bandbreite der Verstärkung automatisch auf 20 MHz reduziert.

### A.1.4. Steuerung des Triggers

Der Trigger dient dazu, ein Signal erst bei Erreichen des gewünschten Signal- bzw. Triggersignalzustands darzustellen. Man kann zwischen Flanken-, Video- oder Impuls-Trigger auswählen. Bei dem Flankentrigger wird entweder auf die positive oder auf die negative Flanke des Signals getriggert. Das Signal wird erst dargestellt, wenn ein voreingestellter Schwellenwert über- bzw. unterschritten wird. Der Zeitpunkt des Triggerstarts ist auf die Bildschirmmitte voreingestellt, kann aber verändert werden. Die Bedienung des Triggers wird in Abb. 7.6 gezeigt.

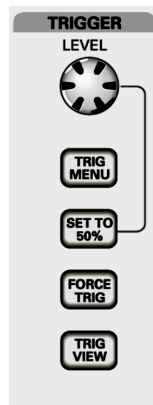


Abbildung A.6: Trigger-Bedienelemente.

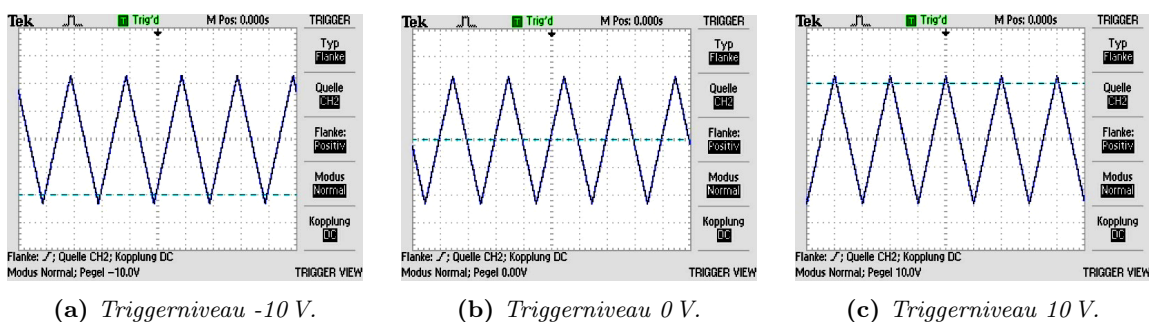


Abbildung A.7: Bildschirmdarstellungen eines periodischen Signals bei drei verschiedenen Triggerniveaus (-10 V, 0 V und 10 V).

#### A.1.5. Hilfsmittel

Das TDS2002 bietet einige weitere Funktionen an, die vom oberen Bedienpanel (siehe Abb. A.8) angesteuert werden können.

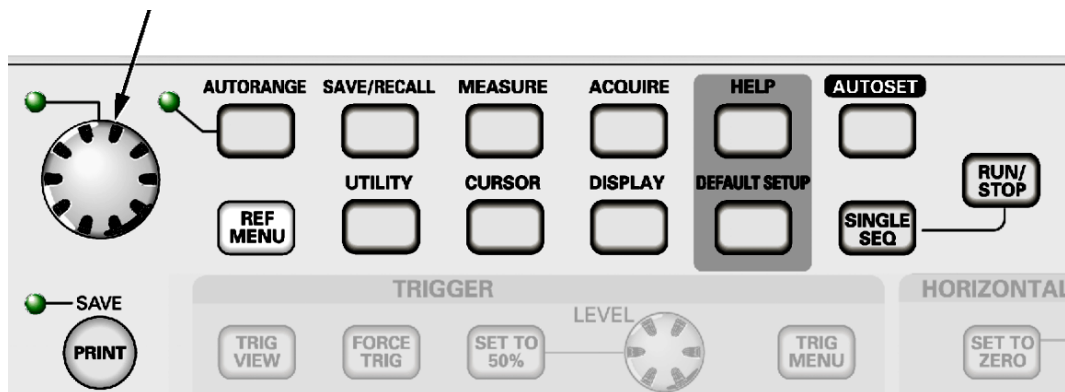


Abbildung A.8: Oberes Bedienpanel.

„AUTORANGE“: Stellt die Darstellung der T- und Y-Achsen automatisch ein.

„SAVE/RECALL“: Speichert bzw. lädt die aufgenommenen Daten, Bild oder Oszilloskop-Einstellungen.

„MEASURE“: Ermöglicht das Messen einiger Messgrößen. Darunter: Frequenz, Periode, Mittelwert,  $U_{SS}$  (Abstand der höchsten und niedrigsten Scheitelwerte des gesamten Signals),  $U_{\text{Effektiv}}$  (Berechnet numerisch den Effektivwert des Signals), Minimum, Maximum. Die Messung wird durch Druck auf die entsprechende Bildschirmtaste ausgewählt.

## A.2. Funktionsgenerator Hameg HM 8030

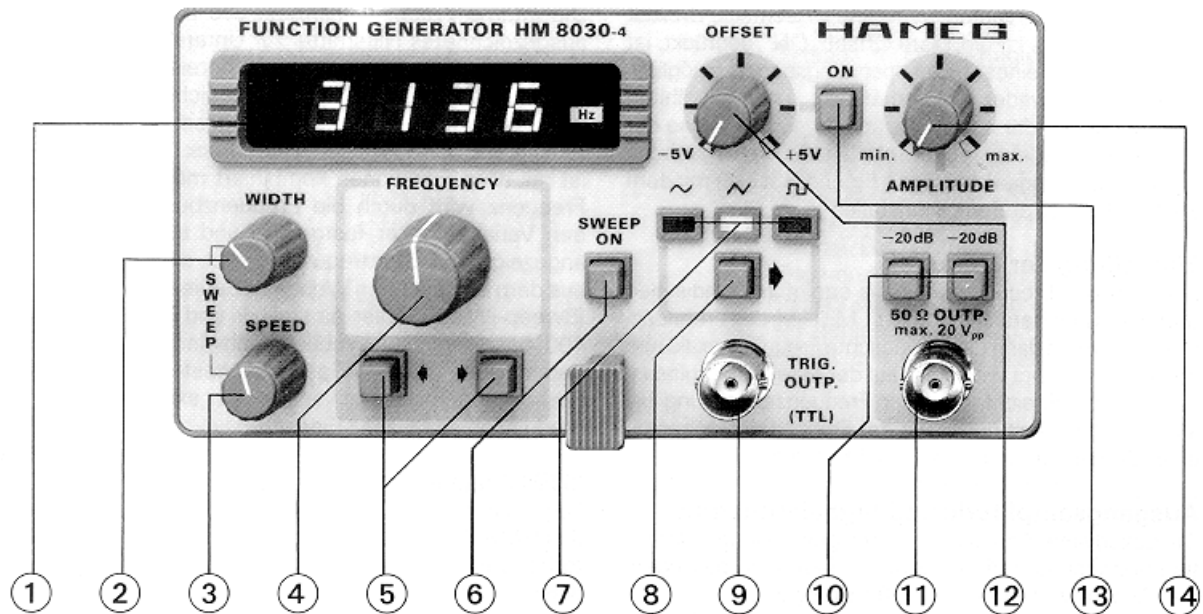


Abbildung A.9: Frontansicht des Funktionsgenerators.

Die wichtigsten Bedienungselemente des Funktionsgenerators:

- 1: ANZEIGE: vierstellig digital, Bereichsindikatoren für Hz und kHz
- 4: FREQUENCY: (Drehknopf): lineare Frequenzeinstellung
- 5: FREQUENCY: (2 Tasten): Wahl des Frequenzbereiches von 0,3 Hz bis 3 MHz in 7 dekadischen Stufen
- 7: SIGNALFORM: (LED's): Anzeige der aktivierten Funktion
- 8: SIGNALFORM: (Taste): Wahl der Signalform zwischen Sinus, Dreieck und Rechteck
- 10: -20dB, -20dB (Drucktasten): Ausgangssignalabschwächung um 20 dB (eine Taste gedrückt) oder 40 dB (beide Tasten gedrückt)
- 11: 50Ω OUTPUT: (BNC-Buchse): Ausgang für Signale mit Signalform gemäß leuchtender LED 7
- 12: OFFSET: (Drehknopf): Hinzufügen eines zusätzlichen Gleichspannungsoffsets (+/-) zum Signal (zuschaltbar mit 13)
- 13: OFFSET ON: (Drucktaste): Aktivierung der Offsetfunktion
- 14: AMPLITUDE: (Drehknopf): Einstellung der Amplitude des Ausgangssignals

## B. Literatur

### Praktikumsbücher:

- W. Walcher, *Praktikum der Physik*, B. G. Teubner, Stuttgart, Leipzig (9. Aufl., 2006).
- H. J. Eichler, H.-D. Kronfeldt, J. Sahm, *Das neue physikalische Grundpraktikum*, Springer, Berlin, Heidelberg (3. Aufl., 2016).  
SUB-Volltextzugang: [Das neue physikalische Grundpraktikum](#)
- D. Geschke (Hrsg.), *Physikalisches Praktikum*, B. G. Teubner, Stuttgart, Leipzig (12. Aufl. mit CD, 2001).  
SUB-Volltextzugang: [Physikalisches Praktikum](#)
- W. Westphal, *Physikalisches Praktikum*, Vieweg, Braunschweig (13. Aufl., 1971).
- G. L. Squires, *Meßergebnisse und ihre Auswertung*, de Gruyter, Berlin (1971).

### Lehrbücher:

- L. Bergmann, C. Schaefer, *Lehrbuch der Experimentalphysik*, 8 Bände, de Gruyter, Berlin.
- W. Demtröder, *Experimentalphysik*, 4 Bände, Springer, Berlin, Heidelberg (2015-2021)  
SUB-Volltextzugang:
  - [Experimentalphysik 1 - Mechanik und Wärme](#) (9. Aufl., 2021)
  - [Experimentalphysik 2 - Elektrizität und Optik](#) (7. Aufl., 2017)
  - [Experimentalphysik 3 - Atome, Moleküle und Festkörper](#) (5. Aufl., 2016)
  - [Experimentalphysik 4 - Kern-, Teilchen- und Astrophysik](#) (5. Aufl., 2017)
- D. Meschede (Hrsg.), *Gerthsen Physik*, Springer, Berlin, Heidelberg (25 Aufl., 2015).  
SUB-Volltextzugang: [Gerthsen Physik](#)
- P. Tipler, G. Mosca, *Physik für Wissenschaftler und Ingenieure*, Elsevier, Spektrum Akademischer Verlag (2. Aufl., 2004).  
SUB-Volltextzugang: [Physik für Wissenschaftler und Ingenieure](#)

### Formeln, Daten:

- H. Stöcker, *Taschenbuch der Physik*, Verlag Harry Deutsch, Frankfurt am Main (7. Aufl., auch mit CD 2013).
- H. Breuer, *dtv-Atlas Physik*, 2 Bände, Deutscher Taschenbuch Verlag, München (1996)
- H. Kuchling, *Taschenbuch der Physik*, Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag, Leipzig (18 Aufl., 2004).  
SUB-Volltextzugang: [Taschenbuch der Physik](#)

## C. Verbesserungsvorschläge

Diese *Hinweise zum Physikalischen Praktikum I und II für Studierende der Naturwissenschaften* wurden unter wesentlicher Beteiligung für das Praktikum engagierter Studierender weitgehend überarbeitet.

Es haben sich aber bestimmt noch Fehler und Unklarheiten versteckt. Bitte notieren und sammeln Sie Rechtschreibfehler, inhaltliche Fehler, missverständliche Formulierungen, nötige aber fehlende Erklärungen und andere Verbesserungsvorschläge und schicken diese per E-Mail an uns oder werfen Sie anonym in den Briefkasten vor dem Büro der Praktikumsleitung (Raum 1044). Dafür danken wir Ihnen schon jetzt und wünschen Ihnen ein erfolgreiches Praktikum!

## D. Änderungsprotokoll

### Version 1.5.0 - September 2026

- Protokoll auf neue Korrekturrichtlinien angepasst und diverse kleine Fehler korrigiert.

### Version 1.4.1 - August 2026

- Erwähnung von Versuch 0 in Kapitel „Vorbereitung auf das Praktikum“ und „Ergebnisse und Diskussion“ entfernt

### Version 1.4.0 - Juli 2026

- Änderungen im Ablauf von Praktikum I ergänzt

### Version 1.3.3 - Juni 2026

- Klarere Formulierung für die Fehlerrechnungsvorbereitung
- Versuch 0 durch Moodle-Vorbereitung ersetzt
- Ablauf für Kurs 7 in PII ergänzt

### Version 1.3.2 - April 2026

- Informationen zu Einheiten und Runden aus der Protokollvorlage übernommen

### Version 1.3.1 - September 2025

- Lageplan verbessert

### Version 1.3.0 - September 2025

- Abgabe der schriftlichen Vorbereitung spezifiziert. Gültig ab WiSe 2025/26.

### Version 1.2.5 - August 2025

- Verlinkungen verbessert.
- Abgabefristen für Protokolle der ersten Woche von Kurs 7 spezifiziert.

### Version 1.2.4 - August 2025

- Empfehlung zur Verwendung eines karierten Heftes als Laborbuch ergänzt

### Version 1.2.3 - April 2025

- Hinweis auf die neue Fehlerrechnung in Moodle ergänzt

### Version 1.2.2 - Februar 2025

- (4.3) Ist Varianz und nicht Erwartungswert - Moritz
- (4.62)  $\alpha$  statt  $\alpha$  nach den partiellen Ableitungen - Moritz

### Version 1.2.1 - Dezember 2024

- Hinweise zur Abgabe der Protokolle präzisiert

### Version 1.2.0 - Dezember 2024

- Durchführung der Versuche geändert, so dass eine zufällig ausgewählte Person den Versuch vorstellen muss. *Das tritt... nach meiner Kenntnis... ist das sofort. Unverzüglich.*
- Summe in Tabelle 4.1 korrigiert
- Einheiten in Tabelle 4.1 ergänzt

- Richtige Zahlengröße in letzter Spalte von Tabelle 4.1
- Diverse kursive Einheiten korrigiert

#### **Version 1.1.6 - November 2024**

- Räume der Versuche Grafik überarbeitet

#### **Version 1.1.5 - Oktober 2024**

- Neue E-Mail Adresse

#### **Version 1.1.4 - Juli 2024**

- Versuchsanzahl in PII präzisiert

#### **Version 1.1.3 - März 2024**

- Mittelwert und Standardabweichung nach Demtröder - Björn

#### **Version 1.1.2 - Februar 2024**

- Gleichung Fehlerrechnung.1 2pi statt 2 in der Wurzel im Gauß
- Unterschriebenes Messprotokoll als Anhang verpflichtend ab SoSe 24

#### **Version 1.1.1 - Februar 2024**

- Protokoll: Wichtigste Zahlenwerte statt keine Zahlenwerte im Abstract

#### **Version 1.1 - Januar 2024**

- Erste L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X-Version dieses Dokuments
- Einleitung ergänzt
- Orte der Versuche ergänzt
- Angepasst an die digitale Abgabe
- Protokollhinweise modernisiert
- Geschlechtsneutrale Varianten wo möglich verwendet
- Musterprotokoll entfernt und durch L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X-Protokollvorlage in Moodle ersetzt
- Tabellendarstellung an moderne Paperstandards angepasst