Physik 1: Mechanik und Wärmelehre

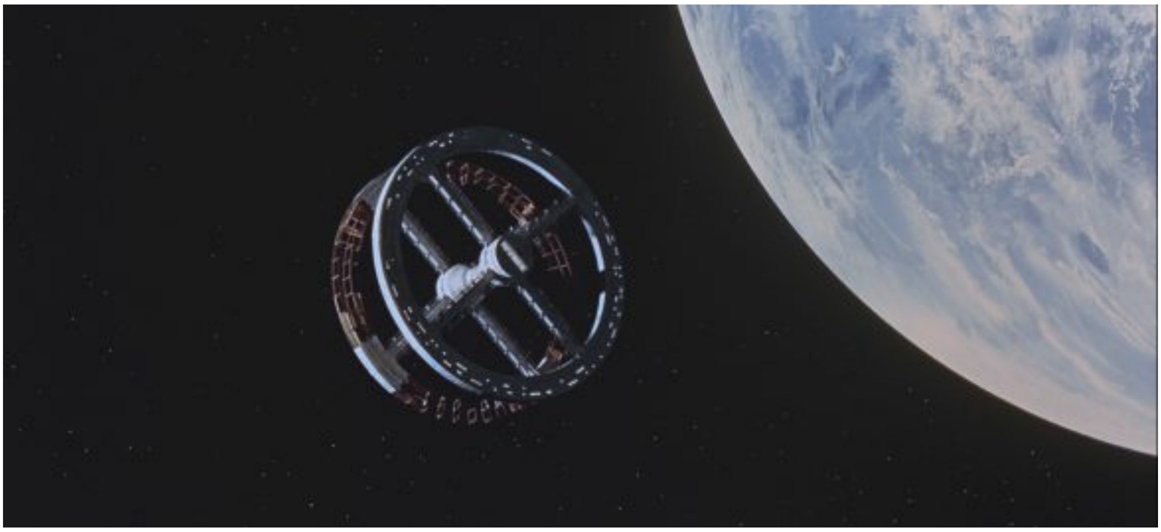
Notizen zur Vorlesung im Wintersemester 2019/20
Teil 1

Peter Schleper

20. Oktober 2019

Institut für Experimentalphysik, Universität Hamburg
peter.schleper@physik.uni-hamburg.de

http://www.desy.de/~schleper/lehre/physik1/WS_2019_20



Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

Es ist nicht genug zu wissen, man muss auch anwenden, es ist nicht genug zu wollen, man muss auch tun. (Goethe)

Abb. 1.1
Der Mars.

Nehmen Sie an, sie wollen zum Mars fliegen. Und Sie wollen erklären, wie sie das machen, auf welcher Bahnkurve, wieviel Treibstoff sie dafür brauchen, welche Kräfte beim Flug auf die Astronauten wirken und wie alt Sie sind, wenn Sie dort ankommen.

All dies sind Fragen, deren Antworten sich aus

- Kräften und Scheinkräften,
- Erhaltungssätzen für Energie, Impuls und Drehimpuls

ableiten lassen. Und diesen wiederum liegen einige wenige grundlegende Prinzipien zugrunde, deren Anfänge bis auf Isaac Newtons Buch "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica" (1687) zurückgeht. Dies ist die Grundlage der klassischen Mechanik, dem Thema dieser Vorlesung.

Es ist tatsächlich nach wie vor faszinierend, dass bereits Newton seine Theorie der Mechanik und der Gravitation abgeleitet hat aus den immer noch geltenden drei methodischen Ansätzen:

- Beobachtung von Phänomenen in der Natur, in diesem Fall der Bewegung der Planeten durch Johannes Keppler
- gezielte, reproduzierbare Experimente
- Mathematische Formulierung von allgemeingültigen Naturgesetzen.

Diese Vorlesungsunterlagen gehen auf auch auf Vorlesungen zurück, die von meinen Kollegen an der Universität Hamburg in früheren Jahren gehalten wurden. Ich bedanke mich sehr bei ihnen für die freundliche Überlassung ihrer Unterlagen. Und ich bedanke mich natürlich auch sehr bei Oliver für die schönen Figuren!

2 Einleitung

2.1 Ziele und Methoden der Physik

Physik ist eine Naturwissenschaft, die grundlegende Phänomene der Natur untersucht, um deren Eigenschaften und Verhalten anhand von quantitativen Modellen und Gesetzmäßigkeiten zu erklären. Naturwissenschaften arbeiten empirisch, d.h. beobachten, messen und analysieren die Zustände und das Verhalten der Natur durch Methoden, die die Reproduzierbarkeit ihrer Ergebnisse sichern sollen, mit dem Ziel, Regelmäßigkeiten zu erkennen. Letztendlich muss es das Ziel sein, zu verstehen, warum die Natur so ist, wie sie ist, und welchen Grundprinzipien sie gehorcht.

Definition von Physik und Naturwissenschaften laut Wikipedia.

In der Physik bedeutet dies,

- die Vielfalt der Erscheinungen der Natur auf möglichst wenige fundamentale Gesetze und Konzepte zu reduzieren,
- daraus Vorhersagen für andere Prozesse in der Natur und
- technische Anwendungen

abzuleiten.

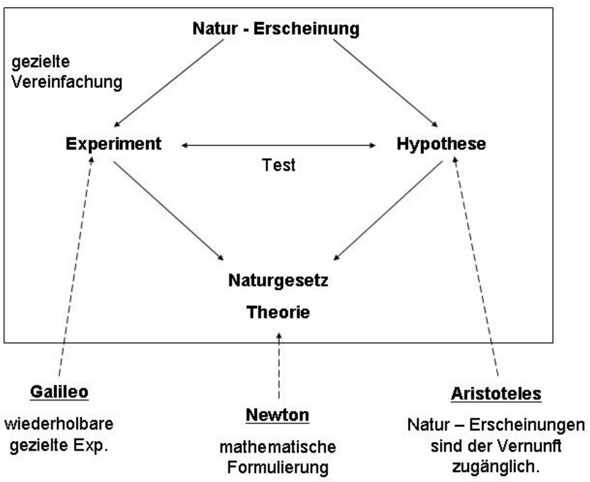


Abb. 2.1 Methode der Naturwissenschaften

Physik und Mathematik Die exakte Formulierung der Naturgesetze erfordert mathematische Formeln. Mathematik ist daher eine Grundlage der Physik, andererseits erfordert die Physik aber auch neue Entwicklungen in der Mathematik. Prominentes Beispiel hierfür ist der Physiker Isaac Newton, der die Differentialrechnung miterfand.

Ein konkretes Beispiel für die mathematische Formulierung eines Naturgesetzes ist die Dirac-Gleichung (nach Paul Dirac, † 1984), mit der die Quantenmechanik und Relativitätstheorie für z.B. Elektronen beschrieben werden kann. Gleichzeitig sagt diese Formel aber auch voraus, dass es Anti-Materie geben muss. Sie lautet

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = 0 \tag{2.1}$$

Hier ist $i = \sqrt{-1}$, γ^μ beschreibt insgesamt vier 4x4 Matrizen, ∂_μ ist eine 4-dimensionale partielle Ableitung nach allen Komponenten der Raum-Zeit, m ist die Masse eines Elektrons, und Ψ ist ein 4-er Spinor (Vektor im Spinorraum). Um dies überhaupt zu verstehen, sind offenbar gute Mathematikkenntnisse notwendig.

Experiment und Messung Um menschliche Willkür und Vorurteile auszuschliessen, müssen reproduzierbare Messungen unter kontrollierten Bedingungen durchgeführt werden.

Physikalische Größen sind definiert durch Messverfahren. Diese wiederum beruhen auf Vergleichen mit standardisierten Größen der gleichen Art.

$$\text{Bsp.: Strecke } x \text{ der Länge} \quad x = 1{,}85 \cdot \mathrm{m} \tag{2.2}$$
$$x = (x) \cdot [x] \tag{2.3}$$

- Hier ist x nur ein im Prinzip frei wählbares Symbol, wobei man allerdings am besten Konventionen folgt (I für Strom, E für Energie, ...).
- (x) ist eine reine Zahl
- $[x]$ ist die Einheit, hier also m = ein Meter.
- die Dimension von x ist hier eine Länge.

2.2 Standardisierte Einheiten

Im internationalen Einheitensystem sind folgende Basiseinheiten festgelegt.

SI-Basiseinheiten

Länge	x	m, Meter	Stromstärke	I	A, Ampere
Zeit	t	s, Sekunde	Stoffmenge	N	mol, Mol
Masse	m	kg, Kilogramm	Temperatur	T	K, Kelvin
			Lichtstärke	I_v	Cd, Candela

Aus diesen SI-Basiseinheiten kann man alle anderen Einheiten ableiten. So ist z.B.

Geschwindigkeit	v	$\frac{m}{s}$
Kraft	F	kg m s^{-2}
Dichte	ϱ	kg m^{-3}

Früher wurden die konkreten Standards für die Einheiten anhand von Beispielen aus der Natur festgelegt. So wurde das Meter zunächst als der 10^{-7} Teil des Abstands von Nordpol und Äquator (1791) definiert, etwas später aber schon als die Länge eines bestimmten Platin-Iridiumstabs in Paris (Urmeter, 1799). Ähnlich zufällig wurden auch die anderen SI-Einheiten definiert.

Seit längerem ist jedoch die Sekunde als festes Vielfaches der Schwingungsdauer einer Cs Atomuhr definiert und das Meter als fester Bruchteil der Strecke, die Licht in einer Sekunde zurücklegt,

$$1\mathrm{m} := \frac{c \cdot 1\,\mathrm{s}}{299792458}, \qquad \text{mit } c = \text{Lichtgeschwindigkeit} \tag{2.4}$$

Ab Mai 2019 gilt ein neues Standard-Einheitensystem, bei dem zusätzlich das Planck'sche Wirkungsquantum, die Elementarladung, die Bolzmann-Konstante und die Avogadro-Zahl benutzt wird, um die anderen SI-Basiseinheiten zu definieren. Genaueres findet sich unter https://en.wikipedia.org/wiki/2019_redefinition_of_SI_base_units. Insgesamt können damit die Basiseinheiten mit Genauigkeiten von typisch 1/10.000.000.000 definiert werden.

Merken:

π	$\approx 3{,}14159$
e	$\approx 2{,}718$
$1a$	$\approx 3{,}15 \cdot 10^7$ s Jahr
c	$\approx 3 \cdot 10^8$ m/s Lichtgeschw.
0 °C	$\approx$ 273 K Temperatur

Den Einheiten können Prefixe vorgestellt werden, um Zehnerpotenzen abzukürzen, wie z.B bei kg (Kilogramm = 1000 Gramm) oder MW (Mega-Watt = 10^6 Watt).

Deka	da	10^1	Dezi	d	10^{-1}
Hekto	h	10^2	Zenti	c	10^{-2}
Kilo	k	10^3	Milli	m	10^{-3}
Mega	M	10^6	Mikro	μ	10^{-6}
Giga	G	10^9	Nano	n	10^{-9}
Tera	T	10^{12}	Piko	p	10^{-12}
Peta	P	10^{15}	Femto	f	10^{-15}
Exa	E	10^{18}	Atto	a	10^{-18}
Zetta	Z	10^{21}	Zepto	z	10^{-21}
Yotta	Y	10^{24}	Yokto	y	10^{-24}

Tabelle 2.1 Präfixe für Zehnerpotenzen.

Universum: sichtbare Größe	45 MLj	$\approx 4{,}25 \cdot 10^{23}$ m
Abstand Erde Sonne:	150 Mkm	$\approx 1{,}5 \cdot 10^{11}$ m
Radius Erde:	6300 km	$\approx 6{,}3 \cdot 10^{6}$ m
Größe H-Atom:	0,05 nm	$\approx 5 \cdot 10^{-11}$ m
Größe Proton:	1,7 fm	$\approx 1{,}7 \cdot 10^{-15}$ m

Tabelle 2.2 Beispiele für Größenordnungen von Längen in der Natur.

2.3 Physikalische Konstanten

Quantity	Symbol, equation	Value	Uncertainty (ppb)
speed of light in vacuum	c	$299\,792\,458$ m s^{-1}	exact*
Planck constant	h	$6.626\,070\,040(81)\times10^{-34}$ J s	12
Planck constant, reduced	$\hbar \equiv h/2\pi$	$1.054\,571\,800(13)\times10^{-34}$ J s	12
		$= 6.582\,119\,514(40)\times10^{-22}$ MeV s	6.1
electron charge magnitude	e	$1.602\,176\,6208(98)\times10^{-19}$ C $= 4.803\,204\,673(30)\times10^{-10}$ esu	6.1, 6.1
conversion constant	$\hbar c$	$197.326\,9788(12)$ MeV fm	6.1
conversion constant	$(\hbar c)^2$	$0.389\,379\,3656(48)$ GeV^2 mbarn	12
electron mass	m_e	$0.510\,998\,9461(31)$ MeV$/c^2 = 9.109\,383\,56(11)\times10^{-31}$ kg	6.2, 12
proton mass	m_p	$938.272\,0813(58)$ MeV$/c^2 = 1.672\,621\,898(21)\times10^{-27}$ kg	6.2, 12
		$= 1.007\,276\,466\,879(91)$ u $= 1836.152\,673\,89(17)\ m_e$	0.090, 0.095
deuteron mass	m_d	$1875.612\,928(12)$ MeV$/c^2$	6.2
unified atomic mass unit (u)	(mass ^{12}C atom)$/12 = (1\text{ g})/(N_A\text{ mol})$	$931.494\,0954(57)$ MeV$/c^2 = 1.660\,539\,040(20)\times10^{-27}$ kg	6.2, 12
permittivity of free space	$\epsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$	$8.854\,187\,817\ldots\times10^{-12}$ F m^{-1}	exact
permeability of free space	μ_0	$4\pi\times10^{-7}$ N A$^{-2} = 12.566\,370\,614\ldots\times10^{-7}$ N A^{-2}	exact
fine-structure constant	$\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$	$7.297\,352\,5664(17)\times10^{-3} = 1/137.035\,999\,139(31)^\dagger$	0.23, 0.23
classical electron radius	$r_e = e^2/4\pi\epsilon_0 m_e c^2$	$2.817\,940\,3227(19)\times10^{-15}$ m	0.68
(e^- Compton wavelength)$/2\pi$	$\lambda\!\!\!^{-}_e = \hbar/m_e c = r_e\alpha^{-1}$	$3.861\,592\,6764(18)\times10^{-13}$ m	0.45
Bohr radius ($m_{\text{nucleus}} = \infty$)	$a_\infty = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/m_e e^2 = r_e\alpha^{-2}$	$0.529\,177\,210\,67(12)\times10^{-10}$ m	0.23
wavelength of 1 eV$/c$ particle	$hc/(1\text{ eV})$	$1.239\,841\,9739(76)\times10^{-6}$ m	6.1
Rydberg energy	$hcR_\infty = m_e e^4/2(4\pi\epsilon_0)^2\hbar^2 = m_e c^2\alpha^2/2$	$13.605\,693\,009(84)$ eV	6.1
Thomson cross section	$\sigma_T = 8\pi r_e^2/3$	$0.665\,245\,871\,58(91)$ barn	1.4
Bohr magneton	$\mu_B = e\hbar/2m_e$	$5.788\,381\,8012(26)\times10^{-11}$ MeV T^{-1}	0.45
nuclear magneton	$\mu_N = e\hbar/2m_p$	$3.152\,451\,2550(15)\times10^{-14}$ MeV T^{-1}	0.46
electron cyclotron freq./field	$\omega^e_{\text{cycl}}/B = e/m_e$	$1.758\,820\,024(11)\times10^{11}$ rad s^{-1} T^{-1}	6.2
proton cyclotron freq./field	$\omega^p_{\text{cycl}}/B = e/m_p$	$9.578\,833\,226(59)\times10^{7}$ rad s^{-1} T^{-1}	6.2
gravitational constant‡	G_N	$6.674\,08(31)\times10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2}	4.7×10^4
		$= 6.708\,61(31)\times10^{-39}\ \hbar c\ (\text{GeV}/c^2)^{-2}$	4.7×10^4
standard gravitational accel.	g_N	$9.806\,65$ m s^{-2}	exact
Avogadro constant	N_A	$6.022\,140\,857(74)\times10^{23}$ mol^{-1}	12
Boltzmann constant	k	$1.380\,648\,52(79)\times10^{-23}$ J K^{-1}	570
		$= 8.617\,3303(50)\times10^{-5}$ eV K^{-1}	570
molar volume, ideal gas at STP	$N_A k(273.15\text{ K})/(101\,325\text{ Pa})$	$22.413\,962(13)\times10^{-3}$ m^3 mol^{-1}	570
Wien displacement law constant	$b = \lambda_{\max}T$	$2.897\,7729(17)\times10^{-3}$ m K	570
Stefan-Boltzmann constant	$\sigma = \pi^2k^4/60\hbar^3c^2$	$5.670\,367(13)\times10^{-8}$ W m^{-2} K^{-4}	2300
Fermi coupling constant**	$G_F/(\hbar c)^3$	$1.166\,378\,7(6)\times10^{-5}$ GeV^{-2}	510
weak-mixing angle	$\sin^2\widehat{\theta}(M_Z)$ ($\overline{\text{MS}}$)	$0.231\,22(4)^{\dagger\dagger}$	1.7×10^5
$W^\pm$ boson mass	m_W	$80.379(12)$ GeV$/c^2$	1.5×10^5
Z^0 boson mass	m_Z	$91.1876(21)$ GeV$/c^2$	2.3×10^4
strong coupling constant	$\alpha_s(m_Z)$	$0.1181(11)$	9.3×10^6

$\pi = 3.141\,592\,653\,589\,793\,238$ $\quad$ e $= 2.718\,281\,828\,459\,045\,235$ $\quad$ $\gamma = 0.577\,215\,664\,901\,532\,861$

$1\text{ in} \equiv 0.0254$ m	$1\text{ G} \equiv 10^{-4}$ T	$1\text{ eV} = 1.602\,176\,6208(98)\times10^{-19}$ J	kT at 300 K $= [38.681\,740(22)]^{-1}$ eV
$1\text{ Å} \equiv 0.1$ nm	$1\text{ dyne} \equiv 10^{-5}$ N	$1\text{ eV}/c^2 = 1.782\,661\,907(11)\times10^{-36}$ kg	$0\ ^\circ\text{C} \equiv 273.15$ K
$1\text{ barn} \equiv 10^{-28}$ m^2	$1\text{ erg} \equiv 10^{-7}$ J	$2.997\,924\,58\times10^{9}$ esu $= 1$ C	1 atmosphere $\equiv 760$ Torr $\equiv 101\,325$ Pa

Abb. 2.2 Physikalische Konstanten, aus http://pdg.lbl.gov/2018/reviews/rpp2018-rev-phys-constants.pdf

3 Kinematik des Massenpunktes

3.1 Massenpunkt

Reale Körper wie z.B. Planeten oder Autos haben natürlich eine Ausdehnung und eine Masse. Sie können darüber hinaus bewegt werden durch

- Translation: Bewegung des ganzen Körpers in eine bestimmte Richtung
- Rotation: Drehung um sich selbst
- Deformation: Veränderung der Form des Körpers

Starre Körper hingegen haben eine feste Gestalt, d.h. die Abstände zwischen allen Teilen des Körpers bleiben unverändert. Für starre Körper ist also die Deformation näherungsweise vernachlässigbar klein.

Massenpunkte sollen keine Ausdehnung haben oder zumindest soll die Ausdehnung so klein sein, dass sie für eine Beobachtung oder ein Experiment keine Rolle spielen soll. In dieser Näherung gibt es also nur noch Translationen, Rotationen spielen keine Rolle mehr. Die Idee ist, dass man in dieser Näherung die physikalischen Prinzipien hinter den Translationen erkennen und interpretieren kann.

3.2 Bahnkurve

In der klassischen Physik wird die Bewegung eines Massenpunktes (oder Teilchens) durch seine Bahnkurve beschrieben, siehe Abb. 3.1

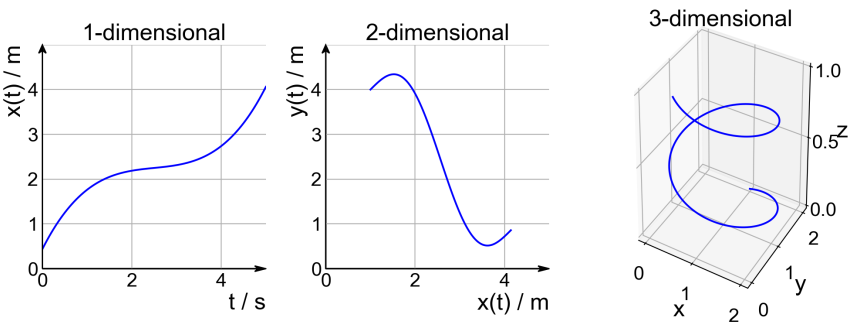


Abb. 3.1 Bahnkurven in 1, 2, und 3 Dimensionen als Funktion der Zeit.

Mathematisch ist die Bahnkurve in einer Dimension (hier x) einfach durch die Funktion

$$x(t) \tag{3.1}$$

gegeben, d.h. zu jeder Zeit t gibt es genau einen Ort $x(t)$, an dem sich das Teilchen befindet. Damit ist der Massenpunkt vollständig beschrieben.

Das ist bereits eine Näherung, denn:

- Für ausgedehnte Körper müsste man zumindest noch angeben, wie der Körper im Raum orientiert ist.
- Für sehr kleine Teilchen (Atome, Elektronen, Quarks, ...) reicht die klassische Physik nicht aus. Man benötigt stattdessen die Quantenmechanik, bei der ein Teilchen nicht durch die Bahnkurve, sondern durch Wellenpakete beschrieben werden muss.
- Wir haben bereits ein Koordinatensystem gewählt, und zwar ein kartesisches System mit geraden Achsen, die rechtwinklig zueinander sind. Bei starken Gravitationsfeldern ist aber der Raum selber gekrümmt (Allgemeine Relativitätstheorie), so dass man mit solchen Koordinatensystemen die Bewegung von Massenpunkten nicht mehr gut beschreiben kann.

Kartesisches Koordinatensystem

- Später werden wir voraussetzen, dass das Koordinatensystem ein Inertialsystem sein muss, d.h., es darf selber nicht rotieren oder beschleunigt werden.

Inertialsystem

Alle diese Dinge schieben wir zunächst beiseite und setzen voraus, dass wir ein kartesisches Koordinatensystem haben, das in einem Inertialsystem ruht, dass die Teilchen, die wir betrachten, nicht zu klein sind und dass wir keine starken Gravitationsfelder in der Nähe haben.

3.3 Ein-dimensionale Bewegung

3.3.1 Geschwindigkeit

Eine ein-dimensionale Bewegung wird durch die Geschwindigkeit der Bewegung beschrieben. Seien t ein beliebiger Zeitpunkt und Δt ein darauf folgendes Zeitintervall, das zur Zeit $t + \Delta t$ endet. Entsprechend seiner Bahnkurve befindet sich dann ein Teilchen zum Zeitpunkt t am Ort $x(t)$ und zum Zeitpunkt $t+\Delta t$ am Ort $x(t+\Delta t)$.

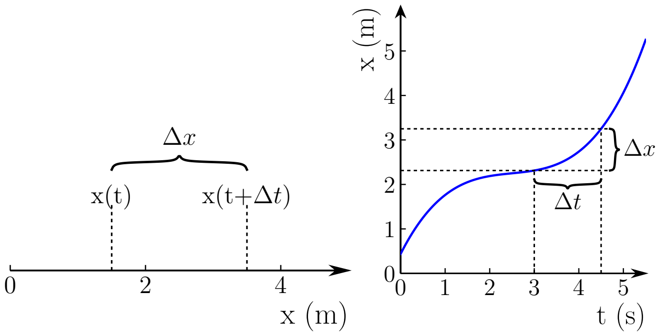


Abb. 3.2 Zur Definition der mittleren Geschwindigkeit.

Die mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall ist dann definiert als

$$\bar{v} := \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \tag{3.2}$$

Geschwindigkeit
Einheit: $[v] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
Dimension: $\dim v = \frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}}$

Sie hängt offenbar vom Anfangszeitpunkt t der Messung und der Länge des Zeitintervalls Δt ab.

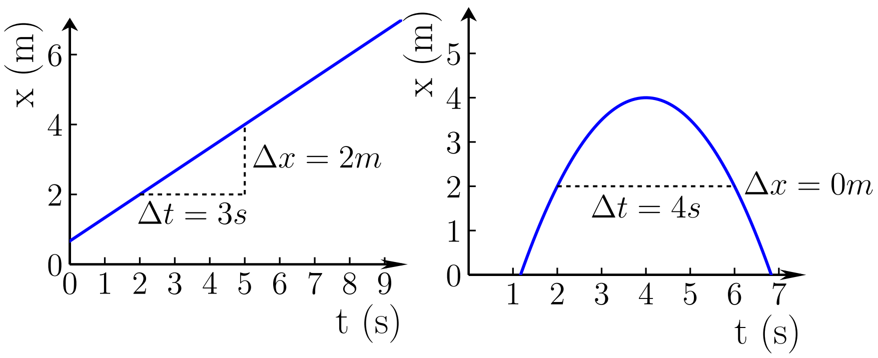


Abb. 3.3 Quantitative Beispiele zur mittleren Geschwindigkeit. Links: $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2\,\mathrm{m}}{3\,\mathrm{s}} \approx 0{,}667\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Rechts: $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0\,\mathrm{m}}{4\,\mathrm{s}} \approx 0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Wie man am zweiten quantitativen Beispiel in Abb. 3.3 sieht, ist die mittlere Geschwindigkeit offenbar kein gutes Maß für Details der Bewegung. So kann die mittlere Geschwindigkeit Null sein, obwohl das Teilchen praktisch niemals in Ruhe ist. Besser ist es daher, den Zeitabstand Δt zwischen den beiden Messungen so klein wie möglich zu machen, $\lim \Delta t \to 0$. Wir definieren daher als momentane Geschwindigkeit

$$\boxed{v(t) := \lim_{\Delta t \to 0} \bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} \tag{3.3}$$

Mathematisch ist die Geschwindigkeit also gerade die Ableitung $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ der Bahnkurve $x(t)$ nach der Zeit und damit die Steigung der Bahnkurve an der Stelle t.

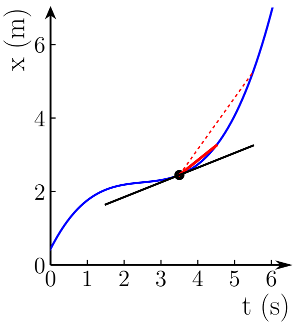


Abb. 3.4
Zur Messung von Geschwindigkeiten.

Die Messvorschrift für die Geschwindigkeit lautet also: Messe die mittlere Geschwindigkeit $\Delta x/\Delta t$ für ein möglichst kleines Zeitintervall Δt. In der Praxis sollte man Δt so klein wählen, dass sich die Geschwindigkeit innerhalb von Δt nicht wesentlich ändert. Bei zu kleinem Δt wird allerdings auch die relative Meßgenauigkeit für sowohl Δt als auch Δx immer größer.

Notationen: Ort und Geschwindigkeit eines Teilchens sind Funktionen der Zeit. Um die Notation zu vereinfachen, werden wir aber oft diese Abhängigkeit nicht wirklich hinschreiben. Es ist also in der Regel

$$x = x(t) \qquad v = v(t) \qquad \text{usw.}$$

Wenn konstante Zeiten, Orte oder Geschwindigkeiten gemeint sind, werden wir diese mit einem Index versehen, wie bei t_0, t_1, x_0, v_0. Die Ableitung einer Funktion $f(x)$ kann wie folgt bezeichnet werden:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$$

Die letztere Schreibweise ist in der Physik viel vorteilhafter, wie wir sehen werden. Von besonderer Bedeutung ist in vielen Fällen die Ableitung nach der Zeit. Daher wird hier häufig eine spezielle Schreibweise mit einem Punkt auf der entsprechenden Größe gewählt. Es ist also beispielweise

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{x}(t)$$

oder kurz

$$v = \dot{x}$$

Berechnung von $\mathbf{x(t)}$ bei bekanntem $\mathbf{v(t)}$ Für kleine Zeitintervalle Δt und hierin nahezu konstante Geschwindigkeiten $\bar{v}$ gilt offenbar

$$\Delta x = \bar{v} \cdot \Delta t$$

Nun kann man jedes längere Zeitintervall in viele kleine Zeitintervalle unterteilen und einfach die Summe bilden,

$$\sum_i \Delta x_i = \sum_i \bar{v}_i \cdot \Delta t_i$$

Im Grenzwert $\Delta t \to 0$ ist dies aber gerade das Integral unter der Funktion $v(t)$. Es gilt daher wegen

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

auch

$$\int_{t_0}^{t_1} v(t)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\, dt = x(t_1) - x(t_0)$$

oder umgestellt

$$x(t_1) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} v(t)\, dt$$

Offenbar gilt dies für alle t_1. Benennt man nun einfach um, $t = t_1$ und $x_0 = x(t_0)$ so folgt

$$\boxed{x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\, dt} \tag{3.4}$$

Die Anfangsbedingung, x_0, kann also so nicht bestimmt werden, wohl aber die Änderung des Ortes mit der Zeit durch die Geschwindigkeit.

Zusammengefasst haben wir mathematisch benutzt:

$$\begin{array}{ccc} \text{mittlere Geschw.} & & \text{momentane Geschw.} \\ \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \bar{v} & \lim \Delta t \to 0 & \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v \\ \Delta x = \bar{v} \cdot \Delta t & \lim \Delta t \to 0 & dx = v \cdot dt \\ & & \displaystyle\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v(t)\, dt \end{array} \tag{3.5}$$

Notation zu Differenzialen: Wir werden im Folgenden fast immer den Umweg über die Notation mit Δ vermeiden und anstelle von zum Beispiel Δx direkt dx schreiben. Wir merken uns, dass wir immer den Grenzwert zu infinitesimal kleinen Zeitintervallen bilden können. Folgende Umformung ist in diesem Sinne also erlaubt:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v \quad \Leftrightarrow \quad dx = v\, dt \quad \Leftrightarrow \quad \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v\, dt$$

mit $x_0 = x(t_0)$ und $x_1 = x(t_1)$.

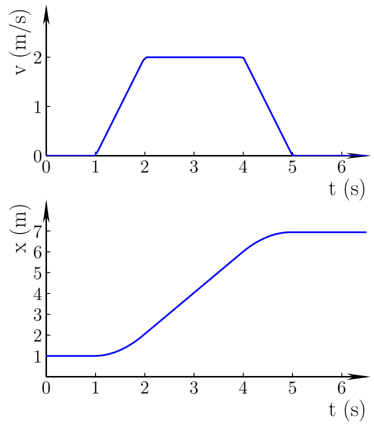


Abb. 3.5
Beispiel für einen Geschwindigkeitsverlauf $v(t)$ (oben) und daraus berechneter Bahnkurve $x(t)$ für $x_0 = 1$ m (unten).

3.3.2 Beschleunigung

Die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit ist die Beschleunigung. Analog zur Beziehung zwischen Ort $x(t)$ und Geschwindigkeit $v(t)$ ergibt sich für die Beziehung zwischen Geschwindigkeit und Beschleunigung $a(t)$ die mittlere Beschleunigung,

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} \tag{3.6}$$

und die momentane Beschleunigung:

$$\boxed{a := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}} \tag{3.7}$$

Beschleunigung
Einheit: $[a] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
Dimension: $\dim a = \frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}^2}$

Die Messung von Beschleunigung benötigt die Messung von Geschwindigkeiten am Anfang und Ende eines Zeitintervalls. Da auch jede der Geschwindigkeitsmessungen ein Zeitintervall benötigt, muss man also den Ort $x(t)$ des Teilchens zu mindestens drei Zeiten messen. Auch hier müssen die Zeitintervalle möglichst klein gewählt werden, um die momentane Beschleunigung zu messen.

zweite Ableitung nach x:
$f''(x) = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)$
zweite Ableitung nach t:
$\ddot{x} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)$

Berechnung von $\mathbf{v(t)}$ aus $\mathbf{a(t)}$: Man kann die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a(t) \qquad \rightarrow \qquad dv = a(t)\,dt$$

integrieren

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt$$

Daraus folgt:

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt \tag{3.8}$$

Jetzt ist $v_0 = v(t_0)$ die Anfangsgeschwindigkeit zum Zeitpunkt t_0.

Berechnung von $\mathbf{v(x)}$ aus $\mathbf{a(x)}$: Tatsächlich kann man aber auch die Geschwindigkeit $v(x)$ an einem bestimmten Ort angeben und natürlich auch die Beschleunigung $a(x)$ an diesem Ort. Insbesondere $a(x)$ ist oft praktischer als $a(t)$, denn zum Beispiel die Gravitationsbeschleunigung hängt nur vom Abstand von der Erde ab.

Um die Beziehung zwischen $v(x)$ und $a(x)$ herzuleiten, starten wir von den Definitionen

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \qquad \rightarrow \qquad dt = \frac{dx}{v} \tag{3.9}$$

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \qquad \rightarrow \qquad dt = \frac{dv}{a} \tag{3.10}$$

Für ein kleines Zeitinterval dt gilt also

$$\frac{dx}{v} = \frac{dv}{a} \qquad \rightarrow \qquad v\,dv = a\,dx \tag{3.11}$$

Man kann nun links und rechts integrieren und erhält

$$\int_{v_0}^{v} v\,dv = \int_{x_0}^{x} a\,dx \tag{3.12}$$

Die Integration über v kann man ausführen und erhält

$$\boxed{\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = \int_{x_0}^{x} a\,dx} \tag{3.13}$$

Diese Gleichung wird noch eine große Rolle spielen, wenn wir über Energieerhaltung reden.

3.3.3 Zusammenfassung der ein-dimensionalen Bewegung

Allgemein gilt:

$$\boxed{a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \qquad v = v_0 + \int_{t_0}^{t_1} a\,dt} \tag{3.14}$$

sowie

$$\boxed{v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \qquad x = x_0 + \int_{t_0}^{t_1} v\,dt \qquad \frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}v_0^2 + \int_{x_0}^{x} a\,dx} \tag{3.15}$$

3.3.4 Spezialfälle

Gleichförmige Bewegung: Ohne Beschleunigung gilt:

$$\boxed{a = 0 \qquad v = v_0 \qquad x = x_0 + v_0 \cdot (t - t_0)} \tag{3.16}$$

Wählt man ausserdem das Koordinatensystem so, dass das Teilchen bei $t = 0$ gerade bei $x_0 = 0$ ist, so gilt

$$x = v_0 \cdot t \tag{3.17}$$

Konstante Beschleunigung: Für a =konstant kann man in Gl. 3.14 das Integral ausführen und findet

$$\boxed{v = v_0 + a \cdot (t - t_0)} \tag{3.18}$$

Dies kann man wiederum in Gl. 3.15 einsetzen und das Integral über die Zeit ausführen,

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \int_{t_0}^{t} (v_0 + a(t - t_0))\, dt \\ &= x_0 + \int_{t_0}^{t} v_0\, dt \; + \; \int_{t_0}^{t} a(t - t_0))\, dt \\ &= x_0 + v_0(t - t_0) \; + \; a \cdot \int_{t_0}^{t} (t - t_0))\, dt \end{aligned} \tag{3.19}$$

Daraus folgt

$$\boxed{x = x_0 \; + \; v_0 \cdot (t - t_0) \; + \; \frac{1}{2} a \cdot (t - t_0)^2} \tag{3.20}$$

Wählt man auch hier wieder das Koordinatensystem so, dass das Teilchen bei $t = 0$ gerade bei $x_0 = 0$ ist, so gilt

$$x = v_0 \cdot t \; + \; \frac{1}{2} a\, t^2 \tag{3.21}$$

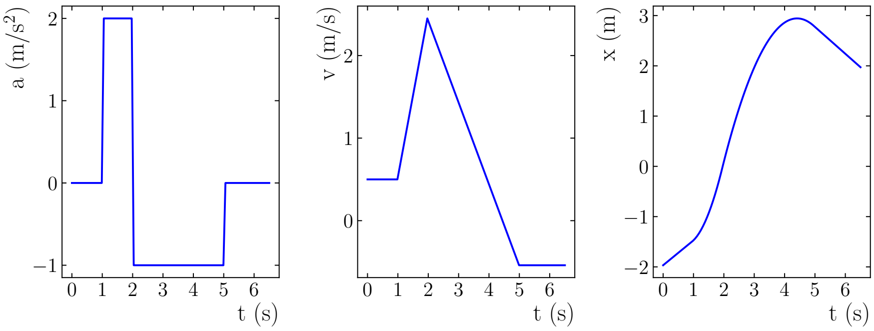


Abb. 3.6 Beispiel einer in bestimmten Zeitintervallen konstanten Beschleunigung (links) und der damit aus Gl. 3.20 folgenden Geschwindigkeit (Mitte) und Ortskurve (rechts) für $v_0 = 0{,}5$ m/s und $x_0 = -2$ m.

Aufgabe 3.1: Ein Ball wird mit Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ senkrecht nach oben geworfen. Nach welcher Zeit kommt der Ball wieder am Boden auf ? Annahme: Konstante Erdbeschleunigung $g = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.
Lösung: Wähle Koordinatensystem so, dass x senkrecht nach oben zeigt. Erdbeschleunigung zeigt damit in $-x$ Richtung, d.h. $a = -g = -9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Wähle Anfangshöhe $x_0 = 0$ und Anfangzeit $t_0 = 0$ s. Ball schlägt wieder auf Boden auf, wenn $x(t) = 0 =$ Anfangshöhe. Also nach Gl. 3.20

$$
\begin{aligned}
x(t) &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\
0 &= v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\
&\Rightarrow t = 0 \qquad \text{oder} \qquad 0 = v_0 + \frac{1}{2} a t \\
&\Rightarrow \qquad t = -2\,\frac{v_0}{a}
\end{aligned}
$$

Alternative Lösung: Im höchsten Punkt des Flugs ist $v(t_{max}) = 0$. Daher

$$v(t_{max}) = v_0 + a\,t_{max} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t_{max} = -\frac{v_0}{a}$$

Die Gesamtzeit ist offenbar doppelt so groß wie die Flugzeit zum höchsten Punkt, $t = 2\,t_{max}$. Zahlen einsetzen ergibt:

$$t = -2\,\frac{20\,\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,\frac{\mathrm{s}^2}{-9{,}81\,\mathrm{m}} = 4{,}077\,\mathrm{s}$$

Die Flughöhe ist gegeben durch

$$x(t_{max}) = v_0\,t_{max} + \frac{1}{2}\,a\,t_{max}^2 = -\frac{1}{2}\,\frac{v_0^2}{a} = 20{,}39\,\mathrm{m}$$

Wiederholen Sie die Rechnung mit $x_0 = 5$ m und $t_0 = 10$ s.

3.4 Drei-dimensionale Bewegung

Bewegt sich ein Massenpunkt nicht nur in eine Richtung, sondern gleichzeitig in alle drei Raumrichtungen, so gibt es auch drei Funktionen $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Der Abstand r vom Ursprung des Koordinatensystems ist dabei

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Gemäß den drei Bahnkurven gibt es auch drei Geschwindigkeiten v_x, v_y, v_z in die drei Raumrichtungen.

$$v_x := \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \qquad v_y := \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \qquad v_z := \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

Um nun nicht immer mehrere Gleichungen schreiben zu müssen, fassen wir alle Größen, die mit Richtungen im Raum zu tun haben, zu Vektoren zusammen.

$$\vec{r} := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \vec{v} := \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \tag{3.22}$$

Schreibt man nun den Geschwindigkeitsvektor als

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} \tag{3.23}$$

gilt also

$$\boxed{\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}} \tag{3.24}$$

Dies sind eigentlich drei Gleichungen, eine für jede Komponente im Raum. Die Formel sieht aber genauso aus wie bei der eindimensionalen Geschwindigkeit ($v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$), nur ist sie jetzt eben vektoriell.

Ableitung eines Vektors: komponentenweise

Analog kann man für die Beschleunigungen a_x, a_y, a_z in die drei Raumrichtungen vorgehen. Mit

$$a_x := \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} \qquad a_y := \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} \qquad a_z := \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}$$

und

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \tag{3.25}$$

folgt

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}} \tag{3.26}$$

Auch hier kann man, wie in Gl. 3.14, die Formeln wieder umdrehen und in Integrale verwandeln. Allgemein gilt also

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \qquad \vec{v} = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t_1} \vec{a}\, dt} \tag{3.27}$$

sowie

$$\boxed{\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} \qquad \vec{x} = \vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t_1} \vec{v}\, dt} \tag{3.28}$$

Integrale über Vektoren: komponentenweise

Die vom ein-dimensionalen her bekannte Beziehung zwischen $v(x)$ und $a(x)$ in Gl. 3.15 lässt sich auch in ein sogenanntes Linienintegral umformen, dessen Berechnungsmethode aber erst später besprochen wird.

3.4.1 Schiefer Wurf

Wirft man einen Ball schräg nach oben, so wird er eine Bahnkurve verfolgen, die einen höchsten Punkt erreicht, bevor der Ball wieder den Boden berührt. In einem Koordinatensystem, bei dem die z-Achse nach oben zeigt, sei die Anfangsgeschwindigkeit und die Erdbeschleunigung

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ 0 \\ v_{0z} \end{pmatrix} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_z \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad a_z = -9{,}81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Wählt man wieder den Anfangszeitpunkt $t_0 = 0$ und den Ursprung des Koordinatensystems so, dass $\vec{r}_0 = 0$, so gilt

$$\vec{r} = \vec{v}_0\, t + \frac{1}{2}\, \vec{a}\, t^2 \quad = \begin{pmatrix} v_{0x}\, t \\ 0 \\ v_{0z}\, t + \frac{1}{2}\, a_z\, t^2 \end{pmatrix}$$

Dies sind drei unabhängige Bewegungsgleichungen, die getrennt gelöst werden können. Aus der Gleichung für z folgt wieder die Flugzeit wie in Abschnitt 3.3.4,

$$t = -2 v_{0z} / a_z$$

Eingesetzt in die Gleichung für x ergibt sich die Wurfweite

$$x = v_{0x}\, t = -2 \frac{v_{0x}\, v_{0z}}{a_z}$$

Wirft man unter einem Winkel α_0, so dass $v_{0x} = v_0 \cos\alpha_0$ und $v_{0z} = v_0 \sin\alpha_0$, so folgt für die Wurfweite

$$x = -2 \frac{v_0^2\ \sin\alpha_0\ \cos\alpha_0}{a_z}$$

Aufgabe 3.2: Wiederholen Sie die Rechnung für $x_0 \neq 0$ und $t_0 \neq 0$.