Blatt 2 - SS 19

Bernhard Schmidt

11.4.2019

Felder einer gleichförmig bewegten Ladung

In den kommenden Wochen werden wir uns ausgiebig mit der Abstrahlung elektromagnetischer Wellen beschleunigter Ladungen auseinander setzen.
Als Vorübung und als Einstieg betrachten wir zunächst die Felder einer nicht-beschleunigten Ladung die sich im Laborsystem mit konstanter Geschwindigkeit bewegt.
Nehmen wir an, die Ladung bewegt sich entlang der x-Achse mit der konstanten Geschwindigkeit $v = \beta\, c$. Die Verwendung der "relativistischen Symbole" β und γ ist in der Beschleunigerphysik üblich und nützlich.

Wir wollen die Felder im Laborsystem dadurch berechnen, dass wir sie aus dem Ruhesystem der Ladung (wo sie als Feld einer Punktladung zweifellos bekannt sind) ins Laborsystem transformieren. Für eine Koordinatensystem, das sich entlang der x-Achse bewegt, transformieren sich die Felder wie folgt (Jackson, 3. Auflage, Gl. 11.148):

$$\begin{aligned}
E_x &= E_x{}' \\
E_y &= \gamma(E_{y'} - \beta\, c\, B_{z'}) \\
E_z &= \gamma(E_z{}' + \beta\, c\, B_{y'}) \\
B_x &= B_{x'} \\
B_y &= \gamma(B_{y'} + \beta / c\, E_{z'}) \\
B_z &= \gamma\,(B_{z'} - \beta / c\, E_{y'})
\end{aligned} \tag{1}$$

Im Ruhesystem der Ladung (gestrichenes System) sind die Dinge einfach, die Ladung ruht wie der Name sagt, und zwar am besten im Ursprung bei {x',y',z'}={0,0,0}. Dann ist das Feld der Ladung in diesem System das Coulombfeld einer Punktladung am Aufpunkt {x',y',z'}, bekannte Formel.
Jetzt muss man alles aus diesem System in das Laborsystem transformieren, also sowohl die Koordinaten x'->x etc. als auch die Felder, wie oben beschrieben.

Wenn Sie alles richtig gemacht haben, kommt beispielsweise für die x-Komponenten des elektrischen Feldes heraus

$$E_x = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0}\, \frac{q\,(x - c\,t\,\beta)\,\gamma}{\left(y^2 + z^2 + (x - c\,t\,\beta)^2\,\gamma^2\right)^{3/2}} \tag{2}$$

wobei die ungestrichenen Koordinaten jetzt die im Laborsystem sind.

- Welche anderen Feldkomponenten gibt es ? Symmetrien ?
- Welche Richtung hat das Feld ?

- Nehmen wir einen Beobachtungspunkt auf der y-Achse ($x = 0$) im Abstand b vom Ursprung.
  Wie sehen die Feldkomponenten hier aus ?
  Zu welchem Zeitpunkt erreicht das **radiale** Feld sein Maximum E_{peak} und wie gross ist es ?

- Das vorbeifliegende Teilchen erzeugt an diesem Beobachtungsort einen “elektromagnetischen Puls”. Wie sieht dessen Frequenzspektrum aus ?
  Dazu müssen sie vom Zeitbereich in den Frequenzbereich, **Fouriertransformation !**
  Der Energieinhalt eines (freien) EM-Feldes ist proportional zu $|E|^2$. Können wir eine “charakteristische Frequenz” angeben bis zu der das Feld signifikant Energie enthält ?
  Sie werden feststellen (hoffentlich), dass das Frequenzspektrum im Abstand “b” proportional ist zu

$E[x]$ ~ $x*$BesselK[1, x] mit $x = \omega/\omega_c$ ...

- Machen Sie mal einen Plot von $E[x]^2$ und überlegen Sie, was sie als characteristische Frequenz definieren würden.

- Wie hängt diese "charakteristische Frequenz" dann von b und γ ab ? (Wir können annehmen dass $\gamma >> 1$ ist, also $\beta = 1$).