

Messung der Gravitationskonstante mit hoher Präzision: Das Seattle-Experiment

Wolfgang Hillert
Universität Bonn

Gliederung:

- Einleitung
- Die experimentelle Bestimmung von G : Grundlagen
- Das Seattle “big- G ” Experiment
- Theoretische Vorhersagen zu $G(r)$
- Das Seattle “Eöt-wash“ Experiment
- Zusammenfassung

Einleitung

Newton (Principia 1, 1687):

$$\vec{F} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r_{12}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$$

Erste Schätzung von G aus g, M_E und R_E (Newton):

$$G = \frac{R_E^2}{M_E} \cdot g \approx 6.6 \times 10^{-11} \frac{m^3}{s^2 \cdot kg}$$

In der Folgezeit Entdeckung weiterer Kräfte:

- **Elektromagnetische Kraft**
- **Schwache Kraft**
- **Starke Kraft**

Vergleich der relativen Stärken bei d ≈ 10⁻¹⁵ m:

| starke Kraft | schw. Kraft | em. Kraft | Gravitation |
|--------------|------------------|------------------|-------------------|
| 1 | 10 ⁻⁵ | 10 ⁻² | 10 ⁻³⁸ |

Gilt Newtons Kraftgesetz bei so kleinen Abständen?

Ist G genügend präzise bekannt, um “Vorhersagen“

$$G = \frac{\hbar c}{m_e^2} \cdot \frac{(7\pi)^2}{5} \cdot e^{-\frac{\pi}{4\alpha}} = 6.6723458 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$$

ausschließen zu können?

Meßmethoden I

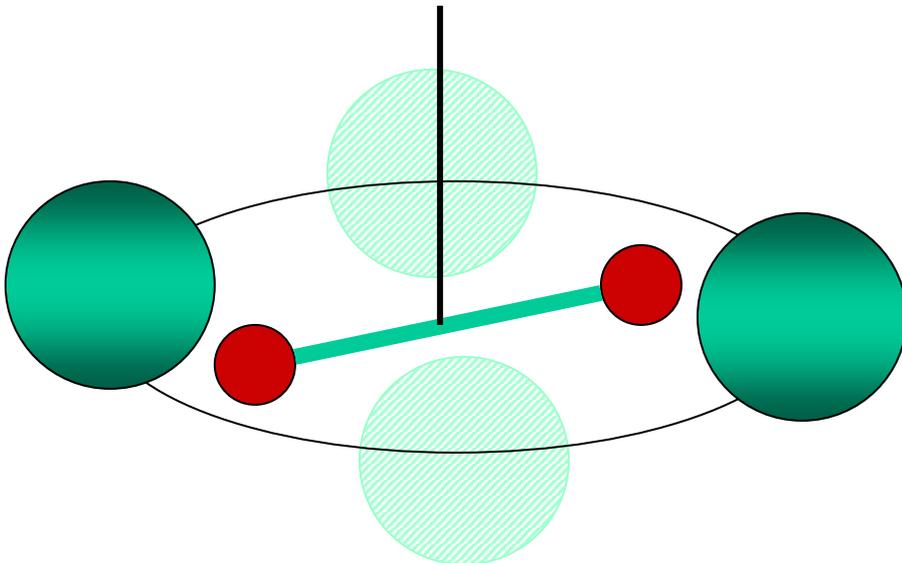
Die Gravitation ist nicht abschirmbar!

Reduktion der Wirkung der Erde ($M_E \approx 6 \times 10^{24}$ kg):

- **Messung horizontaler Kräfte**
- **Relativmessungen**

Konzentration auf folgende Anordnungen:

Torsionspendel, Torsionswaage



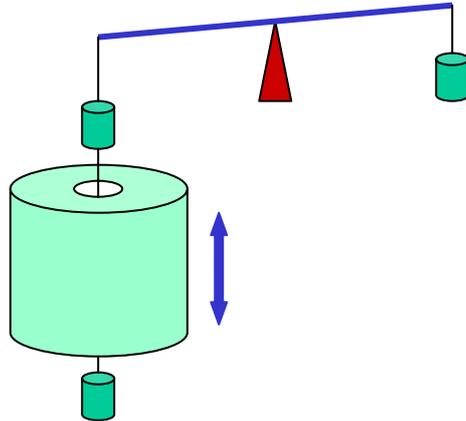
Pendel: **Messung der Schwingungsdauer**

Waage: **Messung des Drehmoments**

Drehmoment $M \approx 10^{-9}$ Nm !

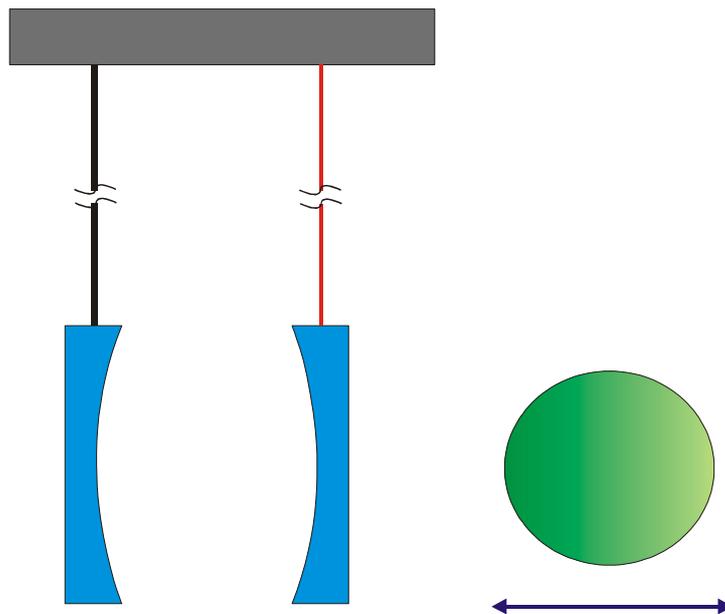
Meßmethoden II

Balkenwaage



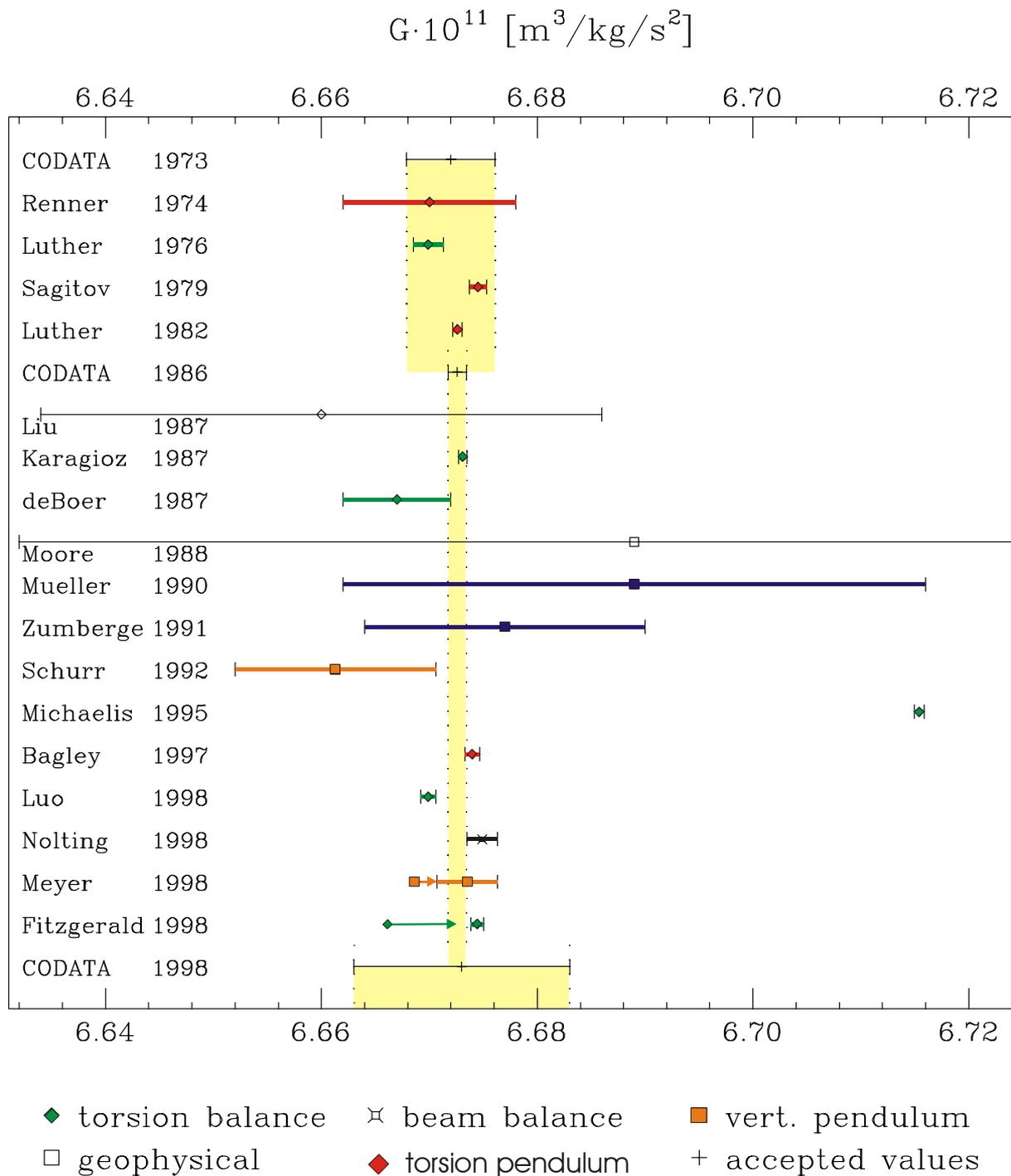
Gewichtsdifferenz $\approx 10^{-6}$ kg !

Fabry-Perot Resonator



Frequenzänderung $\Delta f/f \approx 10^{-7}$!

Stand der Messungen 1998



Systematische Fehler

Anelastizität, Anharmonizität:

$$\tau = \left\{ \left(\kappa_0 + \kappa_1(\omega) + i\kappa_2(\omega) \right) \cdot \theta + \kappa_3 \cdot \theta^3 + \dots \right\}$$

Folge:

$$\begin{aligned} \omega &\rightarrow \omega(A), \quad Q \rightarrow Q(\omega, A) \\ 0 &\leq \delta G/G \leq 1/(2Q) \end{aligned}$$

Kuroda, Phys. Rev. Lett. **75** (1995), Newman et al., Meas.Sci.Techn. **10** (1999)

Kopplung unerwünschter Schwingungsmoden:

Passive magnetische Dämpfung

Ungenaue Kenntnis der Massenverteilungen

Positioniergenauigkeit $\approx \mu\text{m}$

Kriterien für zukünftige Experimente:

- **Keine oder konstante Auslenkung des Pendels**
- **Kein Einfluß der elastischen Eigenschaften des Torsionsfadens auf den Messwert**
- **Unterdrückung seismischer Störungen**
- **Möglichst genaue Kenntnis der Massenverteilung (Multipolzerlegung)**

Multipolentwicklung

Multipolentwicklung der potentiellen Energie:

$$W = -4\pi G \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^{+l} q_{lm} Q_{lm}$$

Multipole des Pendels:

$$q_{lm} = \int \rho(\vec{r}_p) \cdot Y_{lm}^*(\theta_p, \phi_p) \cdot r_p^l d^3 r_p$$

Multipole der Feldmassen:

$$Q_{lm} = \int \rho(\vec{r}_d) \cdot Y_{lm}(\theta_d, \phi_d) \cdot r_d^{-(l+1)} d^3 r_d$$

Bewegungsgleichung des Pendels:

$$I \cdot \ddot{\phi} + \kappa(\omega) \cdot \phi = -\frac{\partial W}{\partial \phi} = I \cdot \alpha(\varphi)$$

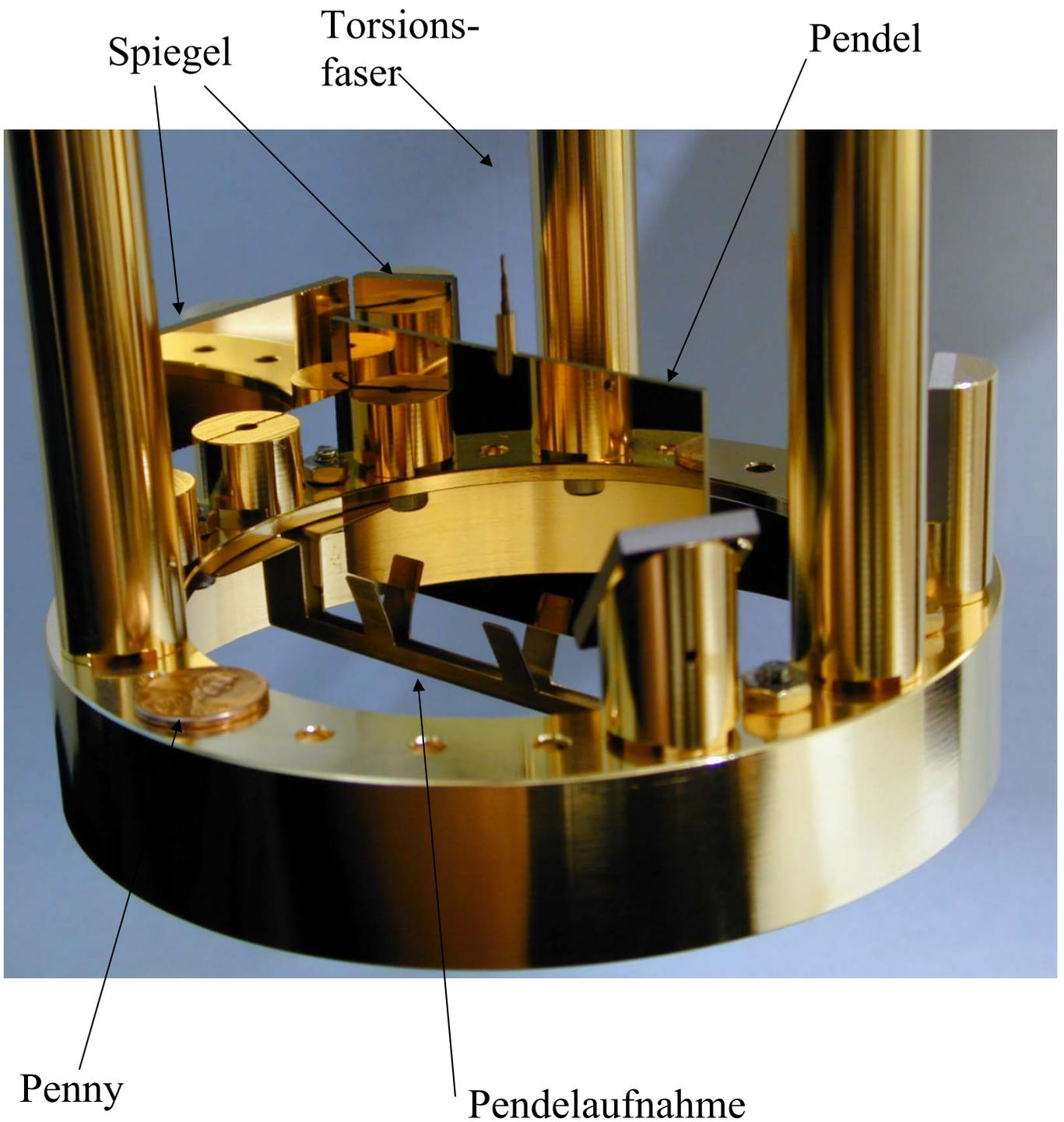
Multipole des Pendels im System der Feldmassen:

$$q_{lm} = \overline{q_{lm}} \cdot e^{-im\varphi(t)}$$

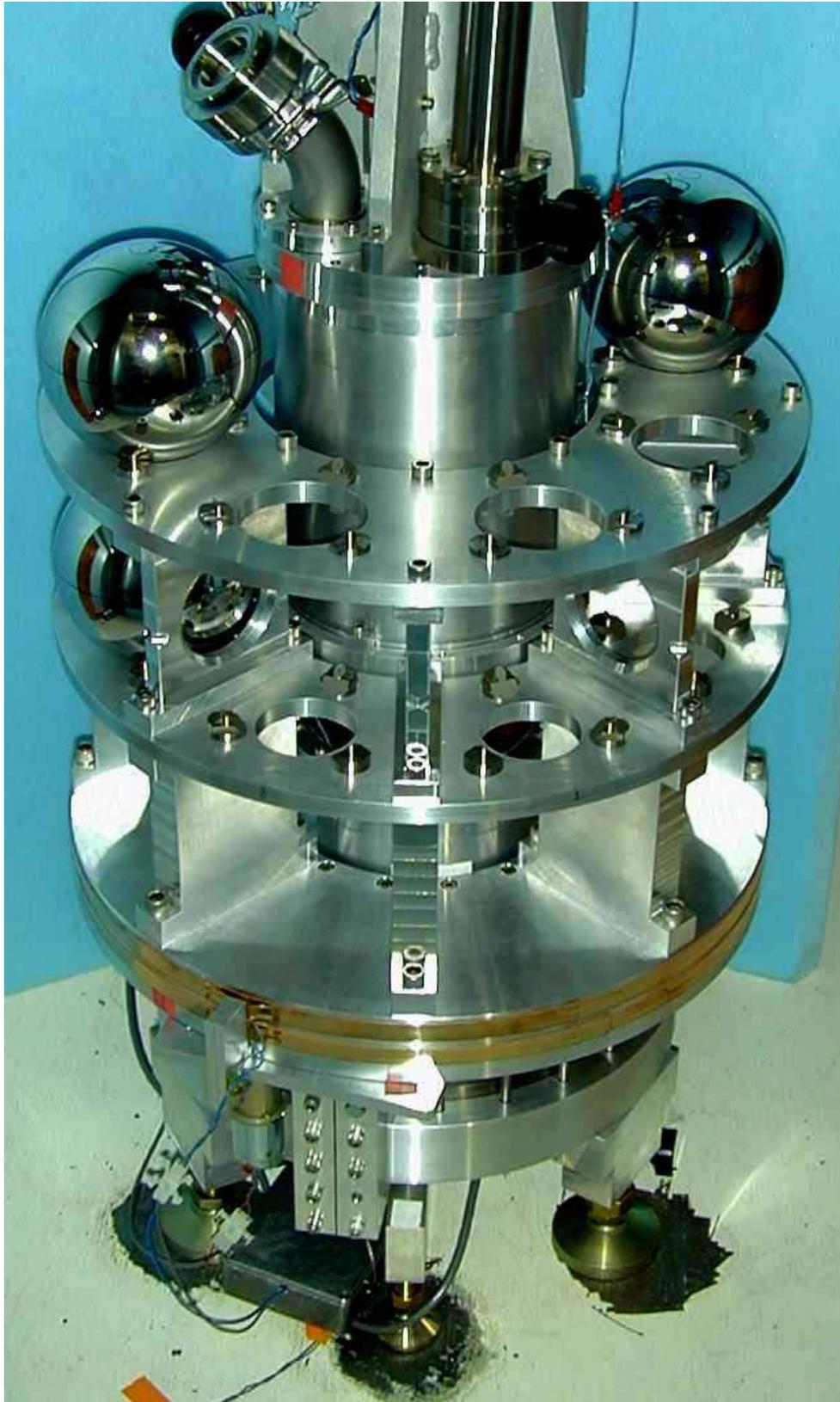
Beschleunigung :

$$\alpha(\varphi) = -\frac{4\pi G}{I} \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^l \overline{q_{lm}} \cdot Q_{lm} \cdot im \cdot e^{-im\varphi}$$

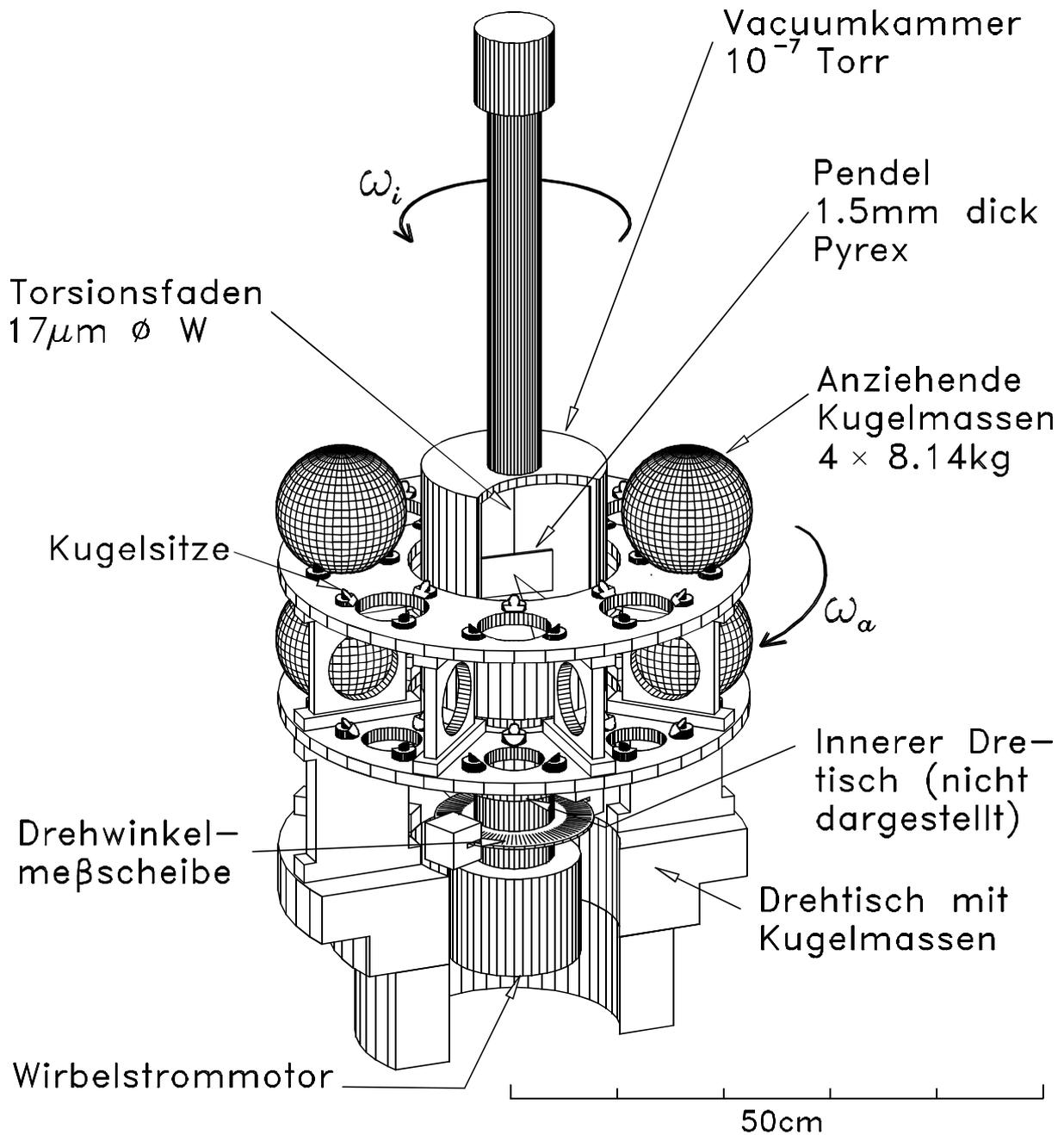
Pendel und Spiegel



Das “big-G“ Experiment



Aufbau des Experiments



$$q_{22} = \frac{\int \rho(\vec{r}_p) \cdot Y_{22}(\theta_p, \phi_p) \cdot r_p^2 d^3 r_p}{\int \rho(\vec{r}_p) \cdot \sin^2(\theta_p) \cdot r_p^2 d^3 r_p} = \frac{b^2 - d^2}{b^2 + d^2} \sqrt{\frac{15}{32\pi}}$$

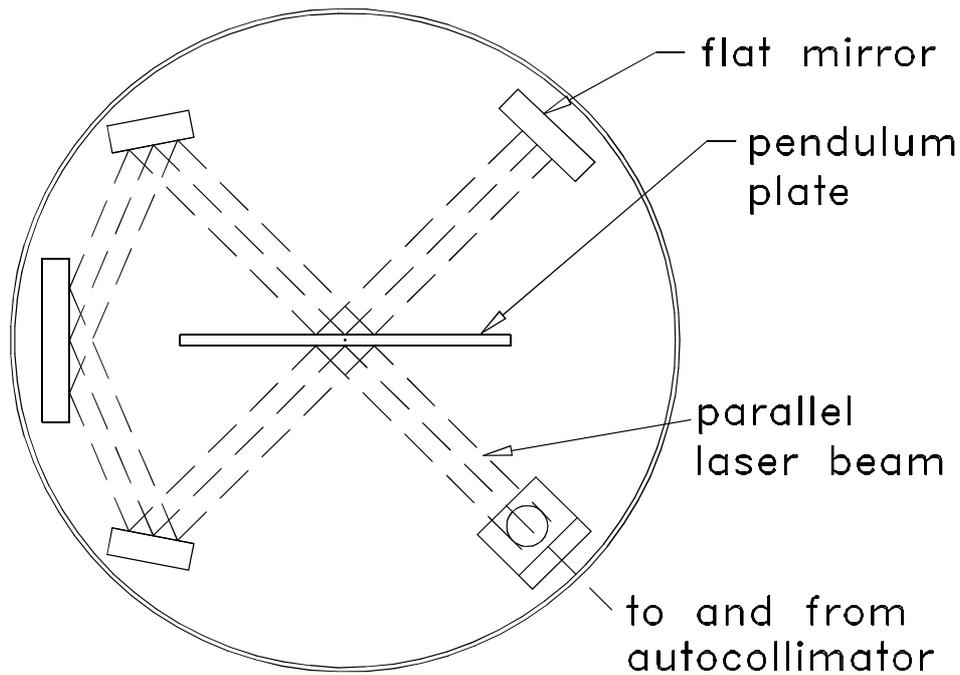
$$q_{42} = 0 \Leftrightarrow 10h^2 = 3 \cdot (b^2 + d^2)$$

$$Q_{42} = 0 \Leftrightarrow R = \sqrt{3/2} \cdot z$$

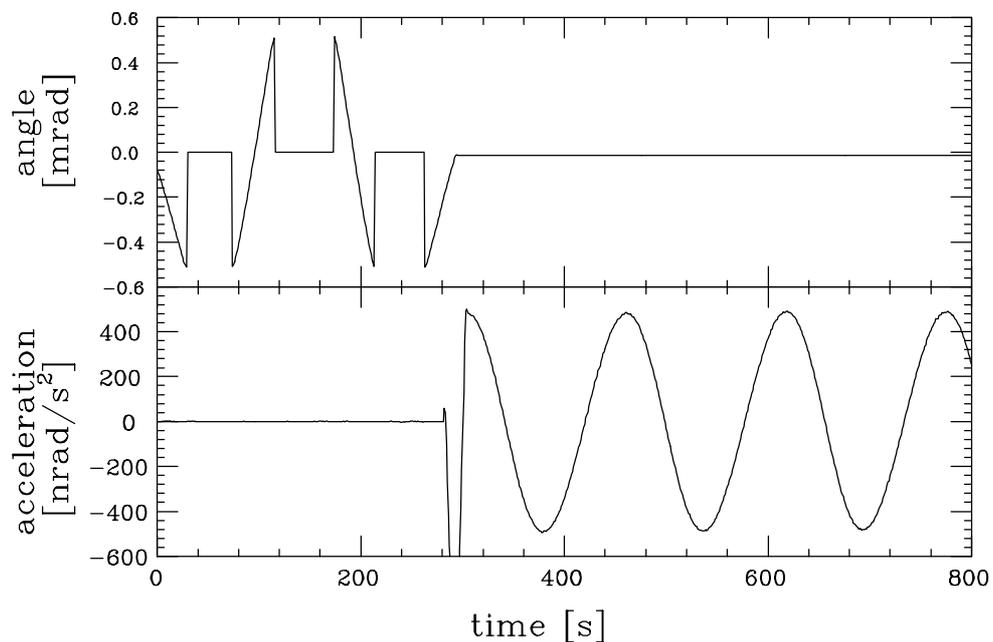
$$Q_{44} = 0 \Leftrightarrow 2 \text{ Kugelpaare mit } \Delta\phi = 45^\circ$$

Aktive Stabilisierung

Optischer Strahlengang:



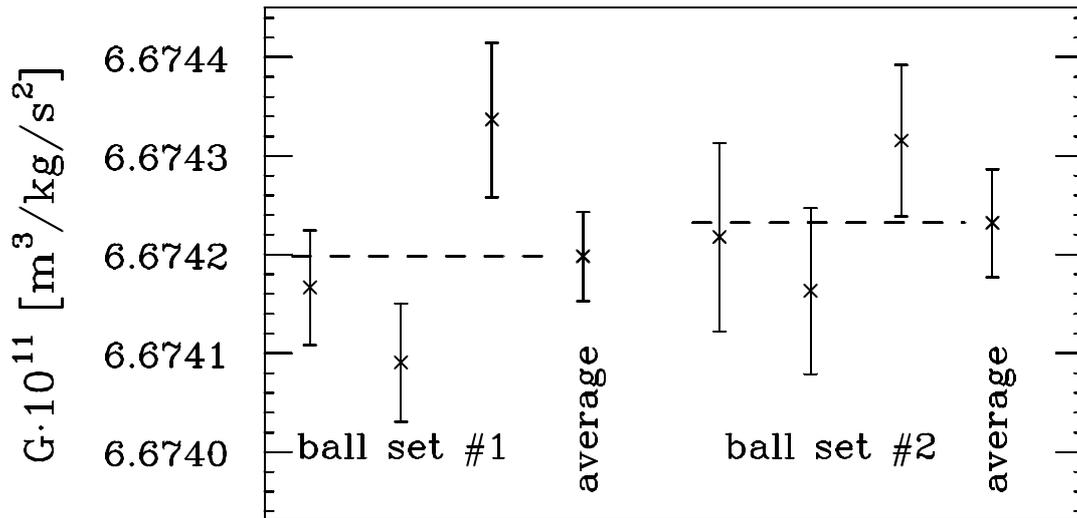
Wirkung der Regelung:



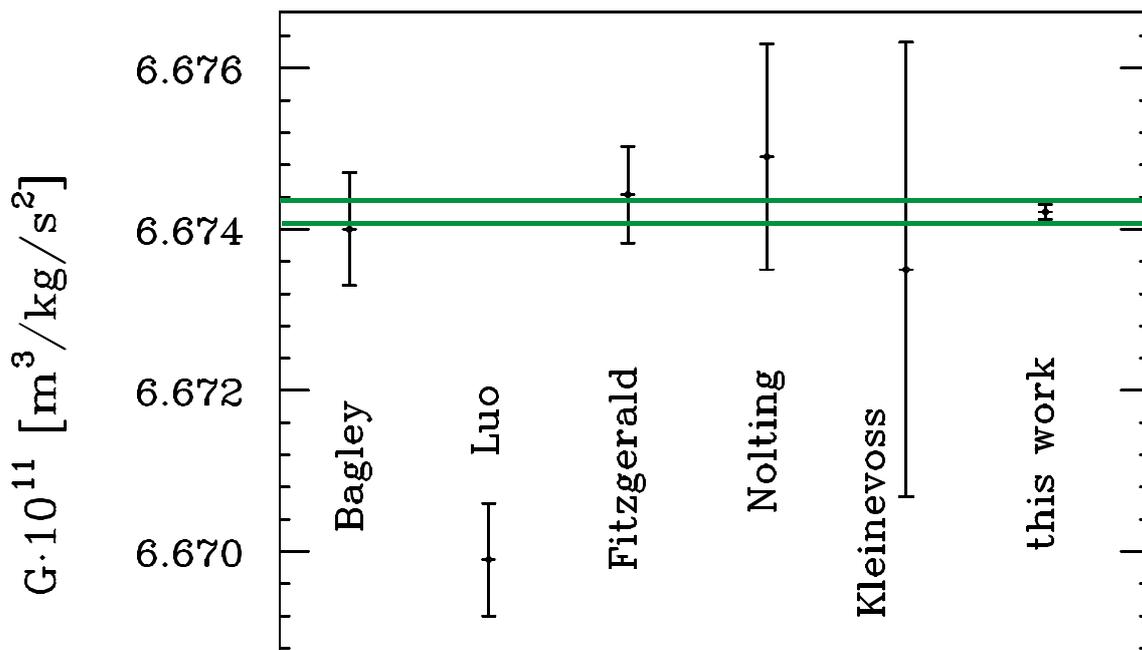
Ergebnisse

Gundlach und Merkowitz, Phys. Rev. Lett. **85**(14) (2000), 2869

Einfluß einer Rotation der Feldmassen:



Vergleich mit anderen Messungen:



$$G = (6.674215 \pm 0.000092) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

Korrekturen und Fehler

Gundlach und Merkowitz, Phys. Rev. Lett. **85**(14) (2000), 2869

Korrekturen:

TABLE I. Summary of correction factors.

| | |
|--|-----------|
| finite pendulum thickness | 1.0007857 |
| pendulum attachment and imperfections | 1.0000433 |
| α_{62} -correction | 0.9998767 |
| α_{82} -correction | 0.9999951 |
| data averaging ($\tau = 1$ s, $\omega_d = 20$ mrad/s) | 1.0000667 |
| numeric derivatives ($\Delta t = 10$ s, $\omega_d = 20$ mrad/s) | 1.0134544 |
| <u>Total:</u> | 1.0142322 |

Quellen systematischer Fehler:

TABLE II. One σ error budget.

| quantity | measurement uncertainty | $\Delta G/G$ (ppm) |
|---------------------------|-------------------------|-----------------------|
| <u>Systematic errors:</u> | | |
| pendulum: | | |
| width | $< 20 \mu\text{m}$ | 0.4 |
| thickness & flatness | $< 4.0 \mu\text{m}$ | 4.0 |
| attractor masses: | | |
| diagonal separation | $< 1.0 \mu\text{m}$ | 7.1 |
| ball-bar calibration | $< 0.2 \mu\text{m}$ | 1.4 |
| vertical separation | $< 1.0 \mu\text{m}$ | 5.2 |
| sphere diameter | $< 1.5 \mu\text{m}$ | 2.6 |
| temperature uncertainty | < 100 mK | 6.9 |
| mass | < 3.0 mg | 0.4 |
| air humidity | | 0.5 |
| residual twist angle: | | 0.3 |
| magnetic fields: | | 0.6 |
| rot. temperature grad.: | | 0.4 |
| time base: | $< 10^{-7}$ | 0.1 |
| data reduction: | | 2.0 |
| <u>Statistical error:</u> | | 5.8 |
| <u>Total:</u> | | 13.7 |

Neue Wechselwirkungen

Axionen (CP-Verletzung):

$$10^{-6} \text{ eV} \leq m_{Axion} \leq 10^{-3} \text{ eV}$$

Dilatonen, Moduli (String-Theorie, SUSY):

$$m_{Dilaton,Moduli} \approx \frac{\Lambda_{SUSY}^2}{M_{Pl}}$$

“Lange” Strings (Kosmologische Konstante):

$$10^{-5} \text{ m} \leq \lambda_{String} \leq 10^{-2} \text{ m}$$

Änderung des Gravitationspotentials:

$$V(r) = -\frac{G \cdot M}{r} \cdot \left\{ 1 + \alpha \cdot e^{-r/\lambda} \right\}$$

Neuere Theorien: $\Lambda_{SUSY} \approx 1\text{-}10 \text{ TeV}$

**Abweichungen vom $1/r^2$ – Gesetz im
Subzentimeter-Bereich**

“Supergravitation” I

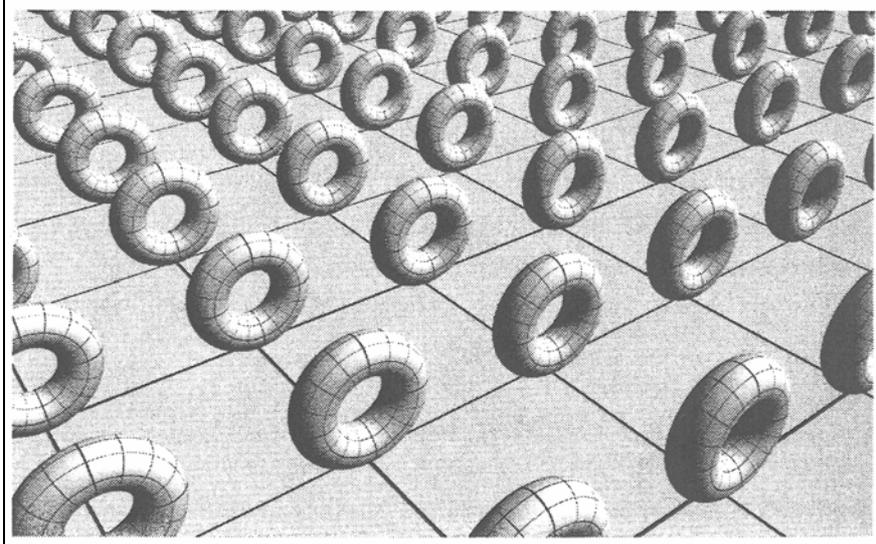
$$\text{HEP: } 1 \equiv \hbar c \approx 200 \text{ MeV} \cdot \text{fm} \quad \rightarrow \quad 2 \cdot 10^{-16} \text{ m} \triangleq \frac{1}{1 \text{ GeV}}$$

$$\alpha_g \equiv \frac{G \cdot m^2}{\hbar c} \approx 6.7 \cdot 10^{-39} \left(\frac{m}{\text{GeV}} \right)^2 \quad \xrightarrow{\alpha_g=1} \quad M_{Pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$$

Aussage der Superstring-Theorie:

Die Raum-Zeit ist zehn-dimensional!

Kompaktifizierung der 6 Extra-Dimensionen!



$$\begin{aligned} L_{String} &= L_{Pl} \approx 10^{-33} \text{ cm} \\ M_{String} &= M_{Pl} \approx 10^{19} \text{ GeV} \end{aligned}$$

Hierarchieproblem $M_{String} \gg M_{SM}$

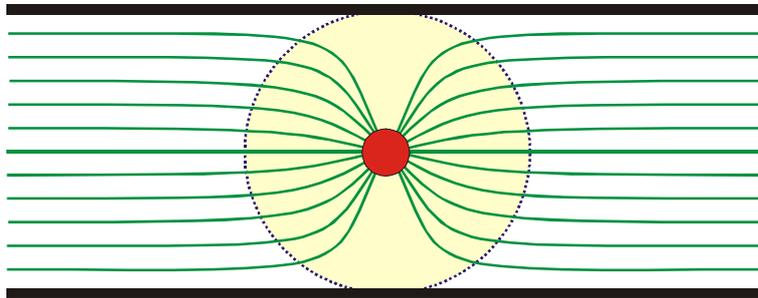
Ist die Planck-Skala wirklich fundamental?

“Supergravitation” II

Arkani-Hamed et al., Phys. Lett. **B429** (1998), 263

Mögliche Erklärung der „schwachen“ Gravitation:

Existenz von $n \leq 6$ “großen” Extra-Dimensionen



$$V(r) \sim \begin{cases} \frac{m_1 \cdot m_2}{\widetilde{M}_{Pl}^{n+2}} \cdot \frac{1}{r^{n+1}} & \text{für } r \ll R \\ \frac{m_1 \cdot m_2}{M_{Pl}^2} \cdot \frac{1}{r} & \text{für } r \gg R \end{cases}$$

Implikation für deren Radius R :

$$R \approx \frac{M_{Pl}^{2/n}}{\widetilde{M}_{Pl}^{1+2/n}} \approx 10^{\left(\frac{32}{n}-17\right)} \text{ cm} \cdot \left[\frac{1 \text{ TeV}}{\Lambda_{SUSY}} \right]^{\left(1+\frac{2}{n}\right)}$$

| $n = 1$ | $n = 2$ | $n = 3$ | $n = 4$ | $n = 5$ | $n = 6$ |
|---------------------|-------------|---------|---------|---------|---------|
| 10^{13} m | 1 mm | 1 nm | 10 pm | 0.1 pm | 1 fm |

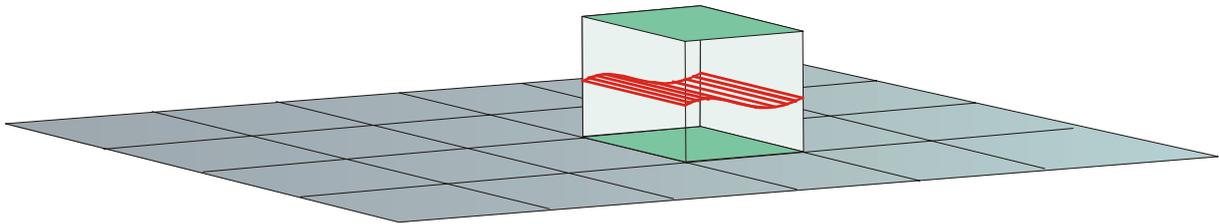
“Supergravitation“ III

Kehagias und Sfetsos, hep-ph/9905417

Yukawa-Potential für $r \gg R$:

$$V(r) = -\frac{G \cdot M}{r} \cdot \left\{ 1 + \alpha \cdot e^{-r/R} \right\}$$

Relative Stärke α aus der Entartung des ersten angeregten Zustands in den Zusatzdimensionen:

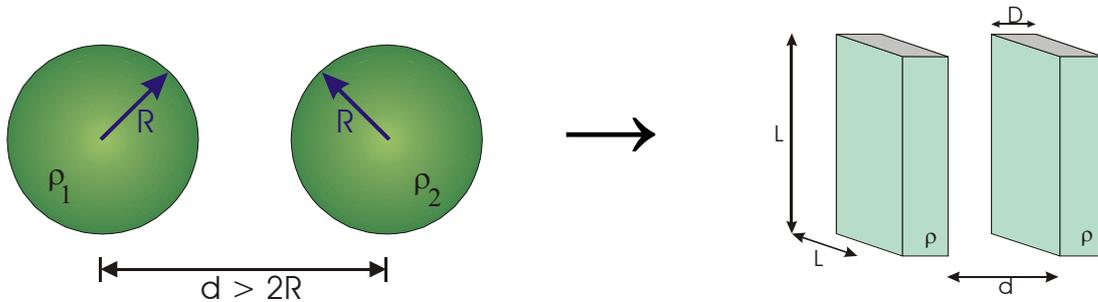


| Torus | Sphäre | Calabi-Yau |
|---------------|----------------|-------------------|
| $\alpha = 2n$ | $\alpha = n+1$ | $\alpha \leq 20$ |

In jedem Fall: $\alpha \geq 1$!

Meßmethode

Krause und Fischbach, hep-ph/9912276



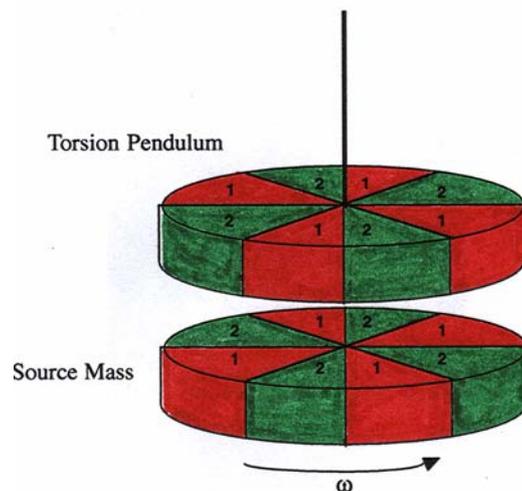
$$F_{Grav} \approx G \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{\rho_1 R^3 \cdot \rho_2 R^3}{4R^2} \sim R^4$$

Übergang zur ebenen Geometrie:

$$F_{Grav}(d) \approx 2\pi G \cdot \rho^2 \cdot L^2 \cdot D^2$$

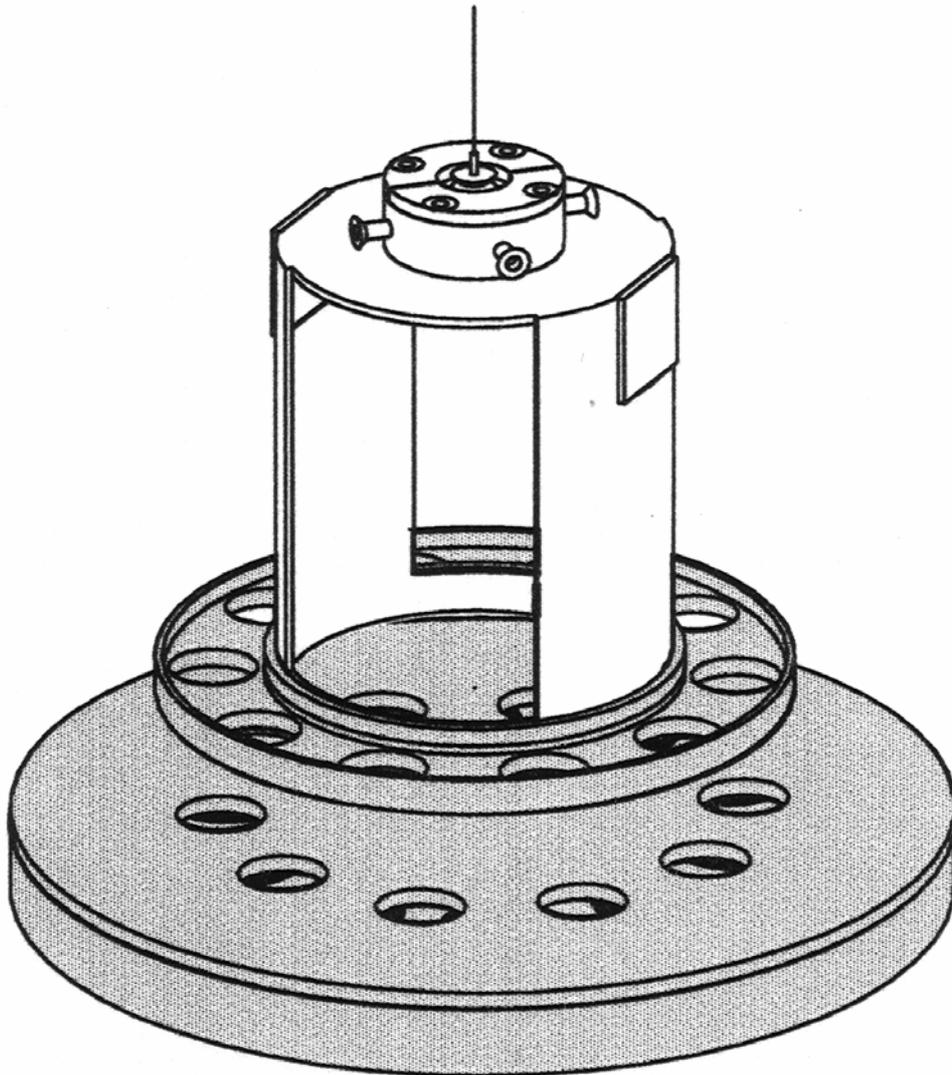
$$F_{Yuk}(d) \approx F_{Grav} \cdot \left\{ \alpha \left(\frac{\lambda}{D} \right)^2 e^{-d/\lambda} \left(1 - e^{-D/\lambda} \right)^2 \right\}$$

Ausnutzung des “schwachen Äquivalenzprinzips”:



Das “Eöt-wash” Experiment

Hoyle et al., hep-ph/0011014



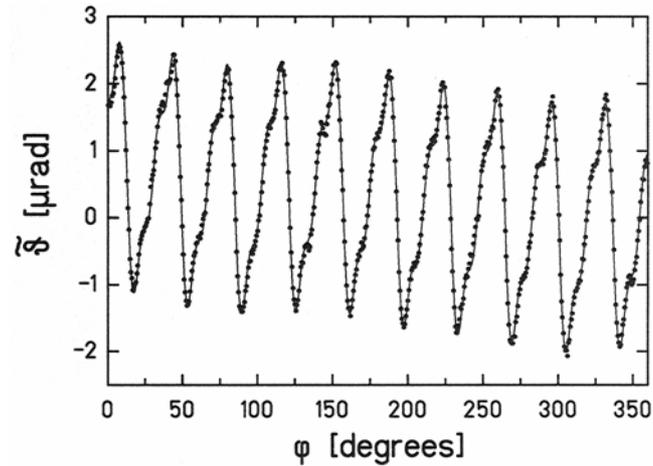
$$\tilde{\mathcal{G}}(\phi) = \sum_n \{b_n \cdot \sin(n\phi) + c_n \cdot \cos(n\phi)\} + \sum_{m=0}^2 d_m \cdot P_m$$

$$T_n = I \cdot \left| (\tilde{b}_n + i\tilde{c}_n) (\omega_0^2 - n^2\omega^2 + 2i\gamma n\omega) \right| \cdot \sec\left(\frac{\pi n\omega}{2\omega_0}\right)$$

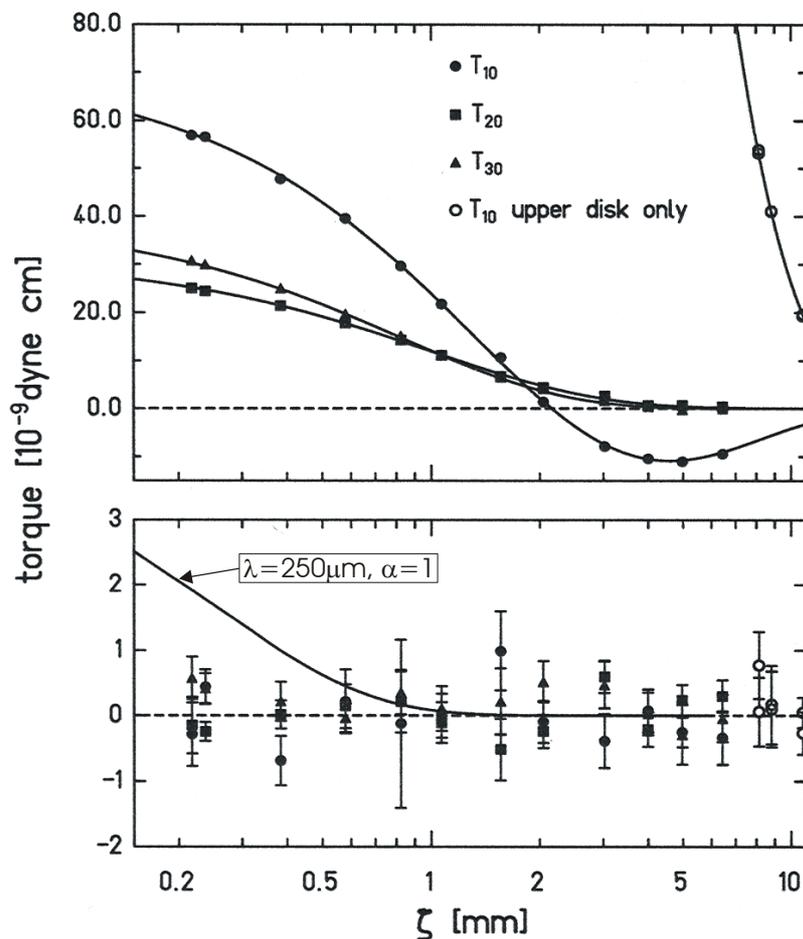
Ergebnisse I

Hoyle et al., hep-ph/0011014

Gemessene Pendeloszillationen:



Abgeleitete Drehmomente:



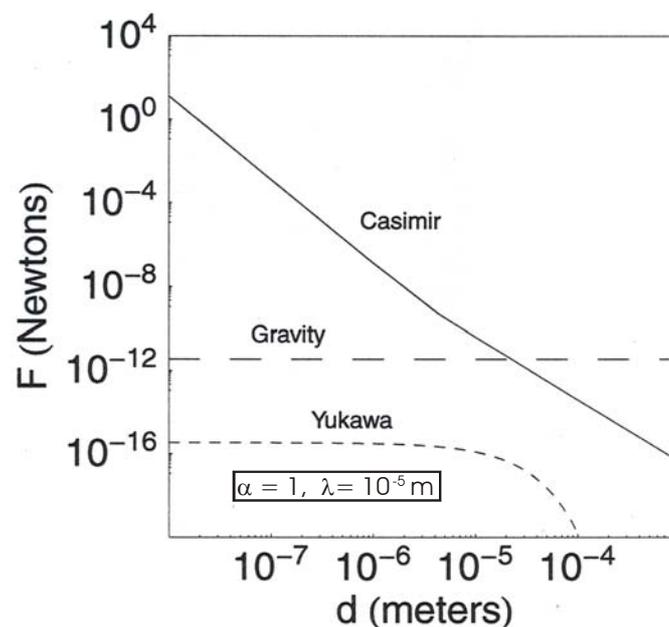
Ausblick

Krause und Fischbach, hep-ph/9912276

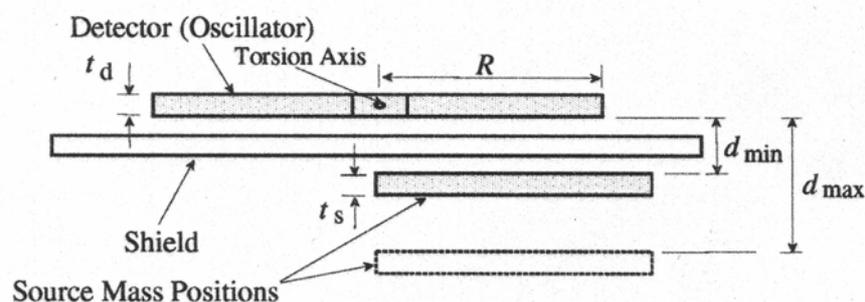
Ausdehnung des Meßbereichs:

$$F_{\text{Casimir}}(d) \approx \begin{cases} -1.202 \left(\frac{kTL^2}{4\pi d^3} \right) & \text{für } d \gg \frac{\pi \hbar c}{kT} \\ -\frac{\pi^2 \hbar c L^2}{240 d^4} & \text{für } d \ll \frac{\pi \hbar c}{kT} \end{cases}$$

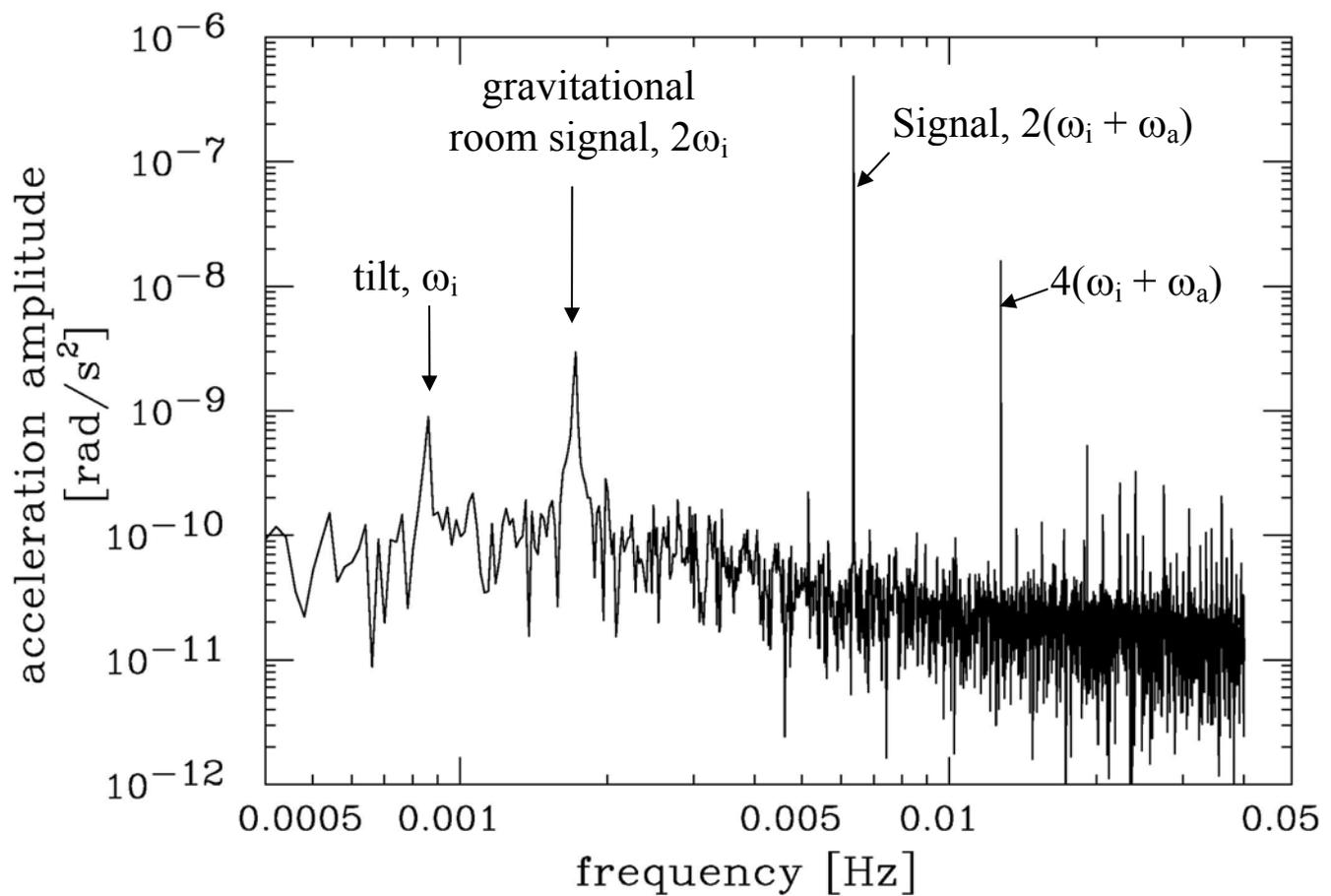
Verhältnis der Kräfte:



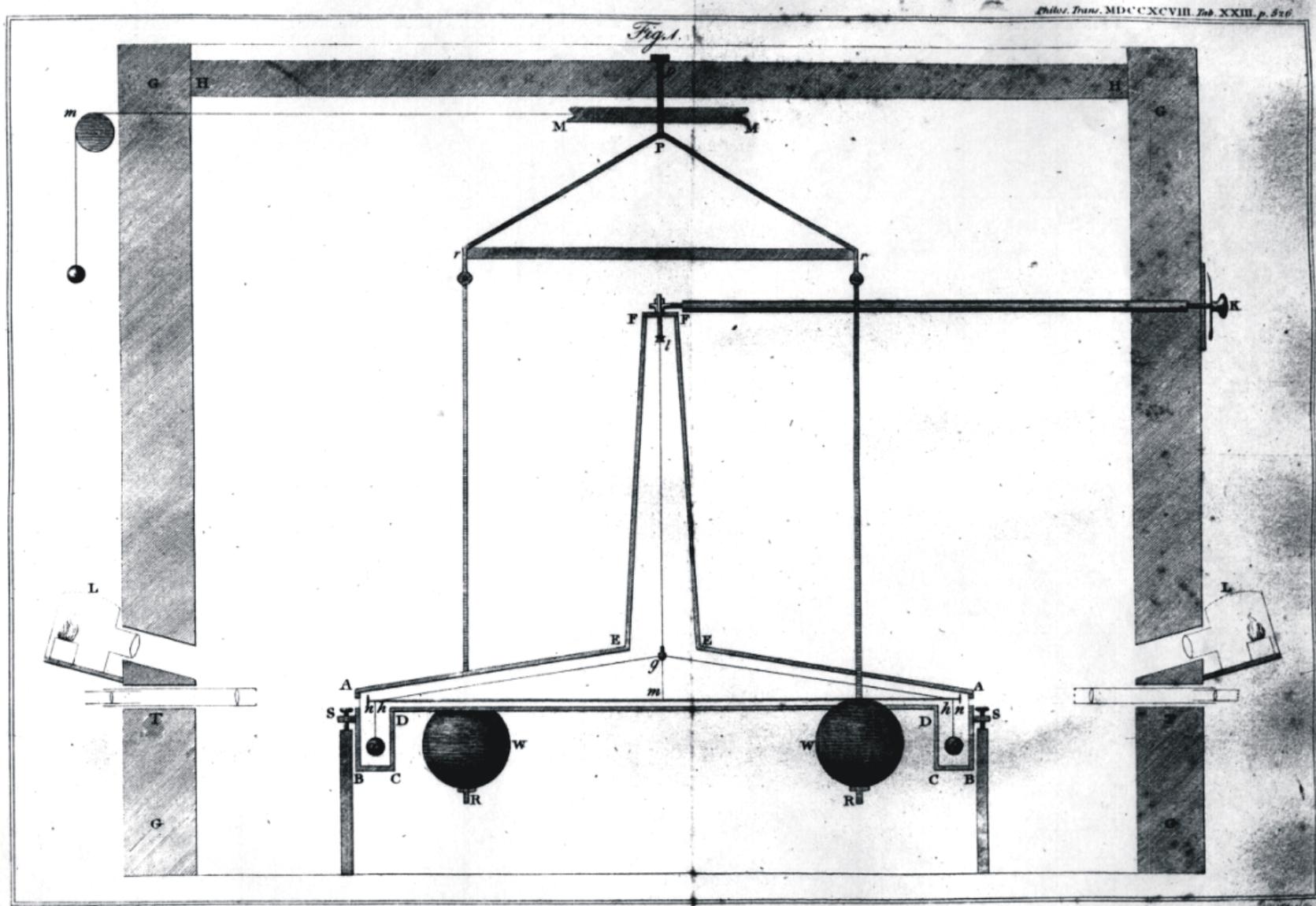
Mögliche Versuchsanordnung:



Fourier-Spektrum

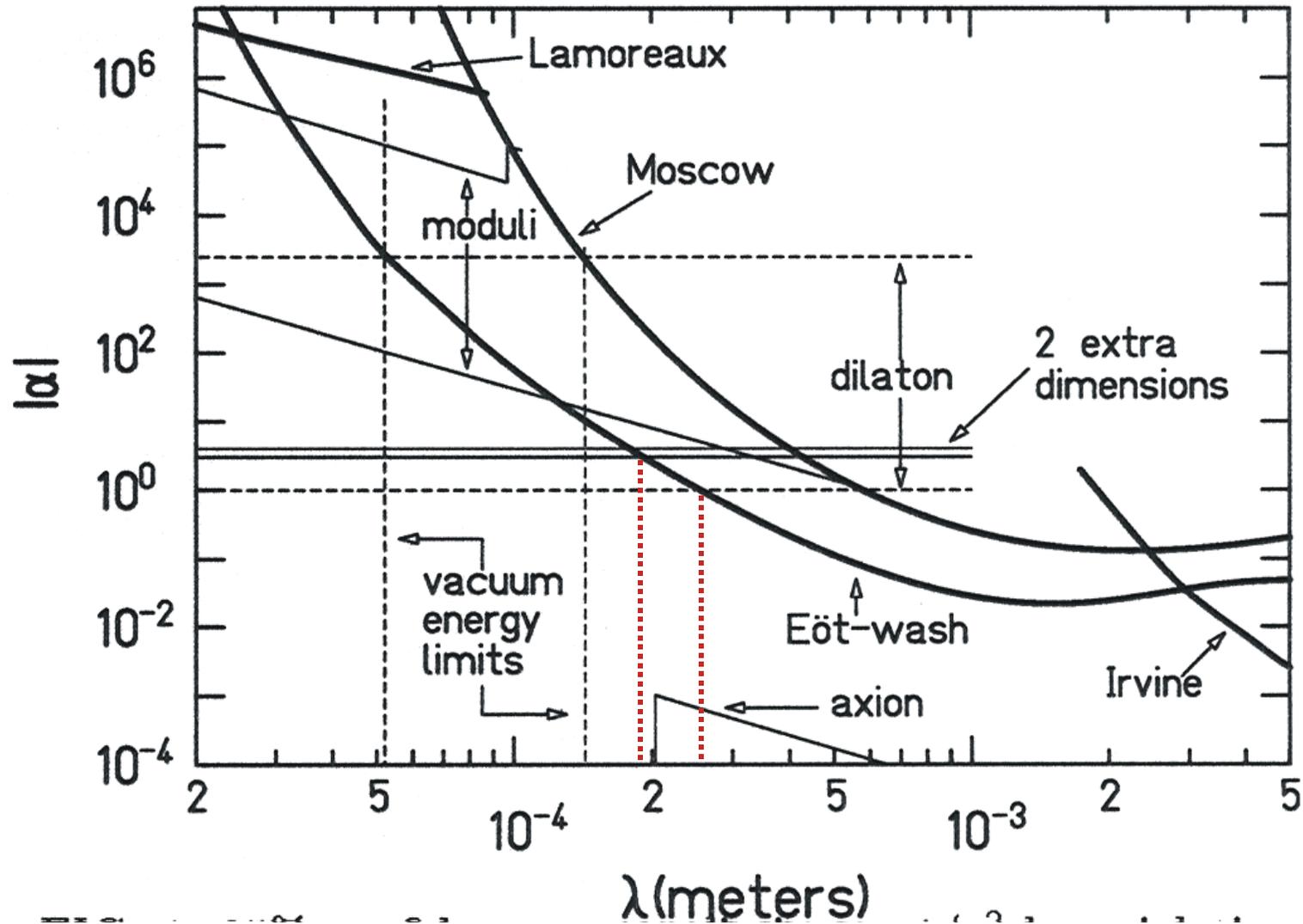


Cavendish-Drehwaage



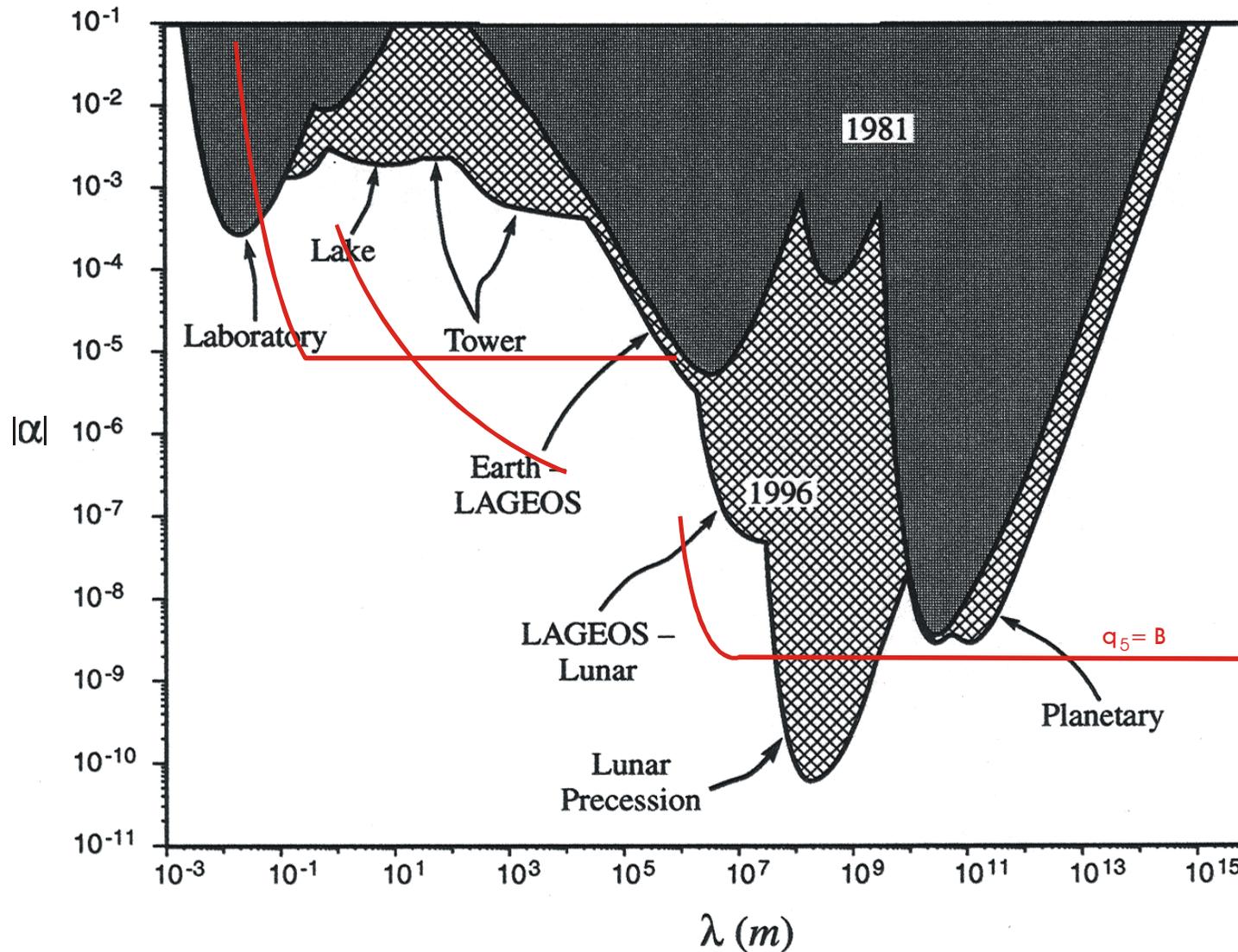
Ergebnisse II

Aus : Hoyle et al., hep-ph/0011014



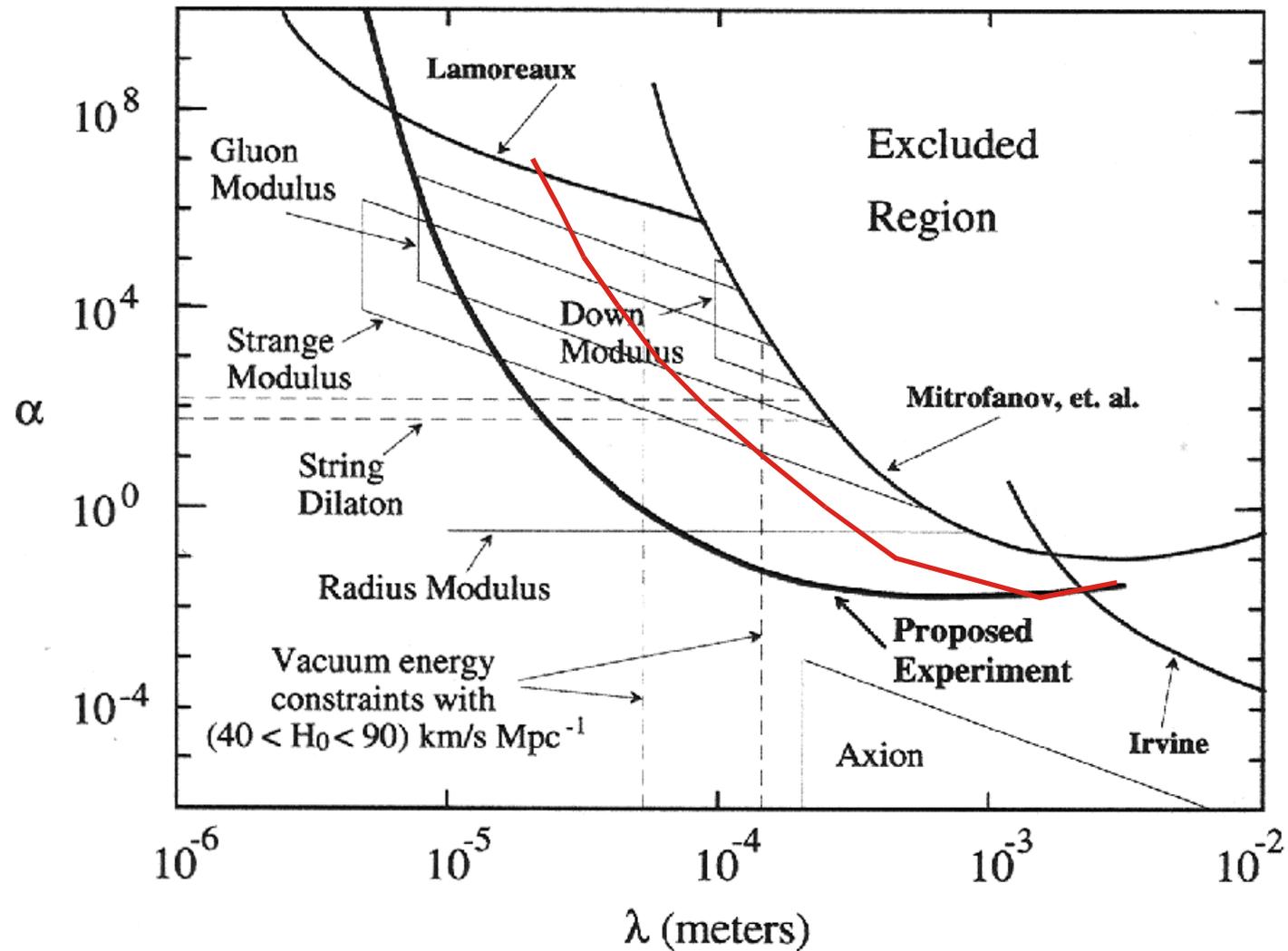
“Abweichungen“ vom $1/r^2$ -Gesetz

Aus: Krause und Fischbach, hep-ph/9912276, Smith et al., Phys. Rev. D61 (1999), 022001-1

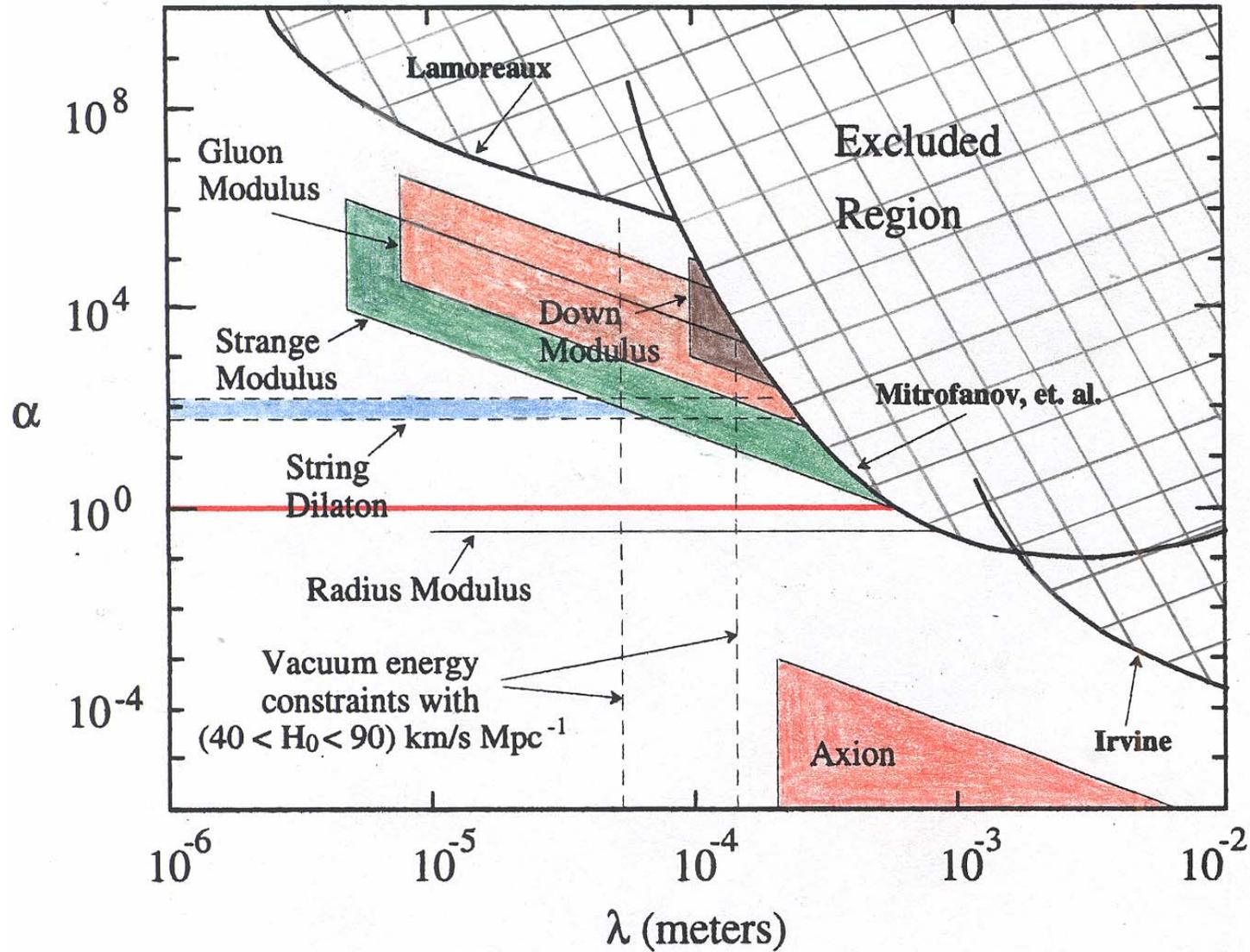


Erwartete Vorhersage

Long et al., hep-ph/9805217



Abweichungen vom $1/r^2$ -Gesetz



Zusammenfassung

Messung der Gravitationskonstante G:

- CODATA 1998: Vergrößerung des Fehlers auf $\Delta G/G = \pm 0.15\%$
- Seattle “big-G” Experiment:

Konsequente Vermeidung der bekannten systematischen Fehlerquellen

Neuer Wert: $G = 6.672415 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$, **Fehler:** $\Delta G/G = \pm 0.0015\%$

Messung der Konstanz von G bei kleinen Abständen:

- String-Theorie: Existenz von Zusatzdimensionen makroskopischer Ausdehnung?
Existenz skalarer Felder kleiner Reichweite?
- Seattle “Eöt-wash” Experiment:

Untersuchung des $1/r^2$ -Gesetzes bei Abständen im Submillimeter-Bereich

Obergrenze der Reichweite für eine relative Stärke $\alpha = 1$: $\lambda \leq 250 \mu\text{m} (3\sigma)$