



Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

FAKULTÄT
FÜR MATHEMATIK, INFORMATIK
UND NATURWISSENSCHAFTEN

MATHEMATISCHER VORKURS

FACHBEREICH PHYSIK

WINTERSEMESTER 19/20

PROF. DR. MICHAEL POTTHOFF

GRUNDLEGENDES ZUSATZTUTORIUM

INHALTSVERZEICHNIS

KAPITEL 1 – ALGEBRAISCHE UMFORMUNGEN & BRUCHRECHNUNG	1
KAPITEL 2 – POTENZ- UND WURZELGESETZE	3
KAPITEL 3 – LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME UND QUADRATISCHE GLEICHUNGEN	4
KAPITEL 4 – FUNKTIONEN	5
KAPITEL 5 – TRIGONOMETRIE	7
KAPITEL 6 – LOGARITHMEN UND TRIGONOMETRISCHE UMKEHRFUNKTIONEN	8

ALGEBRAISCHE UMFORMUNGEN & BRUCHRECHNUNG

Aufgabe 1: Klammern auflösen

Lösen Sie die Klammern auf.

1. $7a - 3b + (a - 2c) - (3c - 6b) - (6a - 3c)$

2. $5a + [7c - (2a - 3b)] - (4c - a + b)$

3. $(-a)(b - a - c)$

4. $(a + b)(c + d) - (a - b)(c - d)$

5. $3(a + b + c) - 5(a + b) - c - 2(b - c - a)$

6. $(a + 4)(a - 2) - (a + 2)(a - 1)$

Aufgabe 2: Binomische Formeln verstehen

Leiten Sie die binomischen Formeln durch Nachrechnen her.

1. $(a + b)^2$

2. $(a - b)^2$

3. $(a + b)(a - b)$

Aufgabe 3: Binomische Formeln anwenden

Wenden Sie die binomischen Formeln an und vereinfachen Sie, wenn möglich.

1. $(-a - b)(a - b)$

2. $(-1 + a)(1 + a)$

3. $(4a^2 - 3)(4a^2 + 3) - (3a - 4)^2 + (5a + 1)^2$

4. $(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2$

5. $(3a + 2b - 5c)^2$

6. $(a^2 + 2ab - b^2)^2$

7. $(8a - b)^2 + 16ab$

8. $a^2 - 2b - b^2 - 2a$

9. $(a + b)^2 - (a - b)^2 - 4ab$

Aufgabe 4: Binomische Formeln mit quadratischer Ergänzung

Vervollständigen Sie die Ausdrücke mittels quadratischer Ergänzung zur binomischen Formel.

1. $49a^2 + 42a + 9$

2. $25a^2 - 40ab + 16b^2$

3. $25x^2 - 5x$

4. $9x^2 + 6x$

5. $4x^2 + 12x - 2$

6. $x^2 + 6x + 3$

7. $x^2 - x + 1$

Aufgabe 5: Faktorisieren

Zerlegen Sie die angegebenen Ausdrücke in Faktoren und vereinfachen Sie so weit wie möglich.

1. $8ab + b^2$

2. $a^2b^2 + ab + ab + 1$

3. $ab - ac - b + c$

4. $3a + 3 - 2a - 2 + 4b(a + 1)$

5. $a^2b + ac - ab - c$

6. $(a^3 - a^2)(2a - 2a^2)$

7. $(-5a - 10b)(-3a + 6b)$

8. $(-a - 1)(a - 1) - (a^2 - 1)$

9. $(-5a - 3b)^2 + (-5a + 3b)^2$

Aufgabe 6: Addition und Subtraktion von Brüchen

Berechnen Sie die folgenden Brüche.

1. $\frac{1}{3} + \frac{4}{3} - \frac{2}{3}$

2. $\frac{a-1}{a} - \frac{a+1}{a} - \frac{1-a}{a}$

3. $\frac{a+1}{b} - \frac{a-b}{b} - \frac{b-a}{b}$

4. $\frac{4}{3} + \frac{3}{4}$

5. $\frac{10}{5} - \frac{3}{2}$

6. $\frac{a}{4} - \frac{1}{2}$

7. $\frac{a}{b} - \frac{b}{2b}$

8. $\frac{a+1}{a-1} - \frac{a-1}{a+1}$

9. $\frac{3}{3b-a} - \frac{4}{b-3a}$

10. $\frac{b+5c-a}{6} - \frac{3a-7b+6c}{4} + \frac{4a-5b+7c}{3}$

11. $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} - \frac{a^2+b^2}{2b} - 1$

12. $\frac{1}{a} + \frac{1}{1+a} + \frac{1}{2+a}$

13. $\frac{a}{a-1} + \frac{a}{a+1} - 2$

14. $\frac{3a-1}{4a-1} - \frac{3}{4}$

Aufgabe 7: Vereinfachen von Brüchen

Vereinfachen Sie, indem Sie sinnvoll ausklammern und kürzen.

1. $\frac{3ax-3by}{6x^2-6xy^2} - \frac{5a^2x+5aby}{10ax^2y+10axy^2}$

2. $\frac{a+2b}{3a^2-3ab} - \frac{1}{2b} - \frac{3b-a}{2ab-2b^2}$

3. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - \frac{b^2}{a^2+ab} - \frac{a^2}{ab+b^2}$

4. $\frac{35ac-50bc}{7a-10b}$

5. $\frac{a^2-ab+ac}{b-a-c}$

6. $\frac{ax+bx+ay+by}{a+b}$

7. $\frac{2x^2+8xy+8y^2}{(x+2y)^2}$

8. $\frac{a^4-b^4}{(a+b)^2(a-b)^2}$

9. $\frac{(a+b)^4-(a-b)^4}{a^2+b^2}$

10. $\frac{(a^2-b^2)^2-(a^2+b^2)^2}{ab(a+b)}$

Aufgabe 8: Multiplikation von Brüchen

Berechnen Sie folgende Ausdrücke.

1. $\left(\frac{a}{3b} + \frac{3b}{a}\right) \cdot 3ab$

2. $\left(\frac{1}{2a} + \frac{1}{3b}\right) \cdot (2a - 3b)$

3. $\frac{5}{8} \cdot \frac{8}{5}$

4. $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}$

5. $\frac{3-a}{4} \cdot \frac{1}{3-a}$

6. $\left(\frac{2}{a} + \frac{3}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{3}\right)$

7. $\frac{7!}{5!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$

Aufgabe 9: Doppel-Brüche

Berechnen Sie die angegebenen Terme. Beachten Sie, dass gilt: $\frac{1}{1/a} = a$ und $\frac{1/a}{1} = \frac{1}{a}$.

1. $\frac{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}}{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}$

2. $\frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}}{1 - \frac{1}{a}}$

3. $\frac{\frac{a^2+b}{b} - \frac{a+b^2}{a}}{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1}$

4. $\frac{\frac{a-1}{a} - \frac{a+1}{1-a}}{\frac{a}{1-a} + \frac{a+1}{a}}$

5. $\frac{\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}}{\frac{a+b}{a-b} - \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}$

6. $\frac{1}{\frac{1}{16a^2} + \frac{1}{2ab} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{16a^2} - \frac{1}{2ab} + \frac{1}{b^2}} + \frac{1}{\frac{1}{8a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{8a} - \frac{1}{2b}}$

7. $\frac{1 - \frac{1}{1-ab}}{a + \frac{1}{1-ab}}$

8. $a - \frac{a}{1 - \frac{a}{a-b}}$

POTENZ- UND WURZELGESETZE

Aufgabe 10: Potenzgesetze

Beweisen Sie mit der Definition $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n\text{-mal}}$ die Potenzgesetze.

1. $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$ 2. $x^n \cdot y^n = (x \cdot y)^n$ 3. $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$

Aufgabe 11: Potenzdefinition anwenden

Schreiben Sie folgende Ausdrücke als Potenzen.

1. $4 \cdot 4 \cdot 4$ 3. $(-a) \cdot a \cdot (-a) \cdot a$
2. $(-a^{-1})(-a^{-1})(-a^{-1})(-a^{-1})$ 4. $-(b-a) \cdot (a-b) \cdot (a-b)$

Aufgabe 12: Potenzgesetze anwenden

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke.

1. $(-3)^4$ 8. $\frac{a^n}{a}$
2. $(-5)^3$ 9. $a^5 \cdot b^5 \cdot \frac{1}{ab}$
3. -3^4 10. $a^3 \cdot a^{-3}$
4. $((-2)^{-1})^3$ 11. $\frac{3a^{n+1}6x^{n+7}9b^{x+1}}{3x^n 2b^{x+1} 3a}$
5. $(-\frac{2}{3})^3$ 12. $\frac{7a^{n+1}a^{n+1}a^n}{a^0 a^n a^{n-1}}$
6. $-\frac{2^3}{3}$ 13. $\frac{a^{x+1}b^{x+3}a^{3x-1}b^{x+3}}{a^{x-2}b^{3-x}a^x b^{x+1}}$
7. $\frac{a^5}{a^3}$ 14. $\frac{a^{3n-x}b^{2n+x}}{a^{n+2x}b^{2n-x}} \cdot \frac{x^{3n+2}y^{2n-1}}{x^{2n-3}y^{n+1}}$

Aufgabe 13: Addition von Wurzeln

Ziehen Sie die Wurzel soweit wie möglich und fassen Sie zusammen.

1. $\sqrt{49}$ 4. $\sqrt{50} + \sqrt{8} + \sqrt{72}$
2. $\sqrt[3]{27}$ 5. $\sqrt{3} + \sqrt{12} - \sqrt{27}$
3. $\sqrt{50}$ 6. $\sqrt{1-x} + \frac{x-1}{2\sqrt{1-x}}$

Aufgabe 14: Multiplikation von Wurzeln

Berechnen Sie die Ausdrücke. Erweitern Sie gegebenenfalls mit einem Wurzelterm, um die Wurzeln im Nenner zu eliminieren.

1. $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$ 4. $\frac{\sqrt{4-x^2}}{2-x} \cdot \sqrt{4-x^2}$
2. $\frac{4}{\sqrt{2}}$ 5. $\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} + \frac{3x^2}{(1-x^2)^2\sqrt{1-x^2}}$
3. $\frac{x-2}{\sqrt{x-2}}$ 6. $\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$

LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME UND QUADRATISCHE GLEICHUNGEN

Aufgabe 15: Lineare Gleichungssysteme

Lösen Sie die Gleichungssysteme durch Umformen und Einsetzen. Lösen Sie für x und y und behandeln Sie a und b als Konstanten.

$$1. \begin{cases} 2x + 5y = 10 \\ 5x + 2y = 2 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 3x - 6y = -30 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x = 3y - 1410 \\ y = 3x - 22 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 51x - \frac{3}{20y} = 3 \\ 48 - \frac{1}{10y} = 2 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 3 \\ \frac{5}{x} - \frac{1}{y} = 4 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 5(y + 2) - 3(x + 1) = 23 \\ 3(y - 2) = 19 - 5(x - 1) \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 3(2x - y) + 4(x - 2y) = 87 \\ 2(3x - y) - 3(x - y) = 82 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} (x - 1)(2y + 5) = (y + 1)(2x - 1) \\ (2x + 7)(y - 2) = (2y - 3)(2 + x) \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} \frac{1}{\frac{7}{2}x - 3} = \frac{1}{4y - 3} \\ \frac{1}{\frac{5}{2}x + 4} = \frac{1}{3y - 1} \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} \frac{1}{3x - 5} = \frac{4}{7y - 13} \\ \frac{1}{y - x} = \frac{8}{3x + y} \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} x + y = a \\ ax - y = b \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} 3x - 2y = 5a \\ 2x - 3y = 5b \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 10x + 6y = 4a + b \\ 6x + 10y = 4a - b \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} x + y = \frac{2(a^2 + b^2)}{a^2 - b^2} \\ x - y = \frac{4ab}{a^2 - b^2} \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} ax + by = 2a \\ a^2x - b^2y = a^2 + b^2 \end{cases}$$

Aufgabe 16: Quadratische Gleichungen

Lösen Sie die Gleichungen für x . Verwenden Sie dazu gegebenenfalls quadratische Ergänzung. Überprüfen Sie mit der p - q -Formel. *Achtung:* Quadratische Gleichungen können in den reellen Zahlen null, eine oder zwei Lösungen besitzen.

$$1. x^2 - 4 = 0$$

$$2. 3x^2 + 27 = 0$$

$$3. x^2 - 9x = 0$$

$$4. x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$5. x^2 + 4x + 2 = 0$$

$$6. x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = 0$$

$$7. x^2 - a^2 = 0$$

$$8. x^2 + \frac{4}{3}ax + \frac{1}{3}a^2 = 0$$

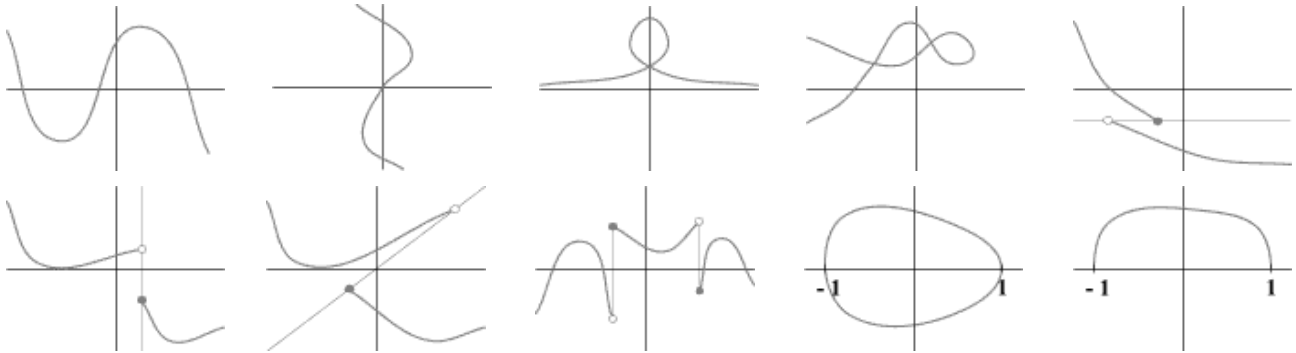
$$9. x^2 + \frac{1}{2}bx - \frac{1}{2}b^2 = 0$$

$$10. 16x^2 - 8ax + a^2 - b^2 = 0$$

FUNKTIONEN

Aufgabe 17: Funktion oder nicht Funktion?

Beurteilen Sie, ob es sich bei den Abbildungen um den Graph zu einer Funktion handelt.



Aufgabe 18: Lineare Funktionen zeichnen

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion. Berechnen Sie dazu nur die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

1. $f(x) = x$

4. $f(x) = 3x - 6$

2. $f(x) = 2x$

5. $f(x) = -2x + 5$

3. $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

6. $f(x) = -x - 2$

Aufgabe 19: Quadratische Funktionen zeichnen

Skizzieren Sie die Funktionen. Bringen Sie dazu die Funktion in die Form $f(x) = a(x - x_0)^2 + b$, wobei x_0 die Verschiebung des Scheitelpunktes in x -Richtung, b die Verschiebung des Scheitelpunktes in y -Richtung und a die Stauchung der Parabel bezeichnet. Überprüfen Sie gegebenenfalls mit einem Computer.

1. $f(x) = x^2$

4. $f(x) = (x - 1)^2 - 1$

2. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$

5. $f(x) = -3x^2 + 6x$

3. $f(x) = (x + 3)^2$

6. $f(x) = (x - 2)^2 + 4x - 5$

Aufgabe 20: Funktionen zeichnen

Skizzieren Sie die Funktionen in geeigneten Koordinatensystemen. Versuchen Sie zunächst, sich vorzustellen, wie die Funktion aussehen müsste. Sie dürfen gerne einen Computer benutzen.

1. $f(x) = 2x^3$

3. $f(x) = |x|$

2. $f(x) = -\sqrt{x}$

4. $f(x) = |x^2 - 1|$

Das Zeichnen von Funktion kann z.B. mit der Website/App „Khan Academy“ (www.khanacademy.org) oder www.ixl.com/math/algebra-2/graph-a-linear-function geübt werden.

Aufgabe 21: Exponentialfunktion

Zeichnen Sie die Exponential- und hyperbolischen Funktionen im Bereich $x \in [-4, 4]$ in ein gemeinsames Koordinatensystem.

1. $f(x) = e^x$

3. $f(x) = \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

2. $f(x) = e^{-x}$

4. $f(x) = \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

Aufgabe 22: Ähnlichkeit von Sinus und Cosinus

Zeichnen Sie die folgenden Funktionen:

1. $f(x) = \sin(x)$

2. $f(x) = \cos(x)$

Machen Sie sich anhand der beiden Zeichnungen klar, dass $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$.

Aufgabe 23: Trigonometrische Funktionen zeichnen

Skizzieren Sie die Funktionen. Sie dürfen dazu gerne einen Computer benutzen. Formulieren Sie anschließend Sätze, in denen Sie den Graphenverlauf mit $\sin(x)$ vergleichen.

1. $f(x) = \sin(x)$

6. $f(x) = 2 \cdot \sin(2x)$

2. $f(x) = \cos(x)$

7. $f(x) = \frac{1}{3} \cdot \sin(0.5x - \pi)$

3. $f(x) = \frac{1}{2} \sin(x)$

8. $f(x) = 1 + \frac{1}{2} \cos(2x)$

4. $f(x) = \sin(x) + 1$

9. $f(x) = \sin(\frac{x}{2\pi})$

5. $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{4})$

Aufgabe 24: Nullstellen finden

Finden Sie heraus, ob die angegebenen Funktionen Nullstellen haben und bestimmen Sie diese.

1. $f(x) = 2x - 1$

6. $f(x) = (x + 3)^2 - 4$

2. $f(x) = 4x^2 + 5$

7. $f(x) = e^x$

3. $f(x) = -3x^2 + 6$

8. $f(x) = e^{-x} - 1$

4. $f(x) = (x - 2)^2$

9. $f(x) = 3x^3 - 4x$

5. $f(x) = 5$

10. $f(x) = (x - 1)^2 - 1$

TRIGONOMETRIE

Aufgabe 25: Grad- und Bogenmaß

Rechnen Sie die Winkel vom Grad- ins Bogenmaß um.

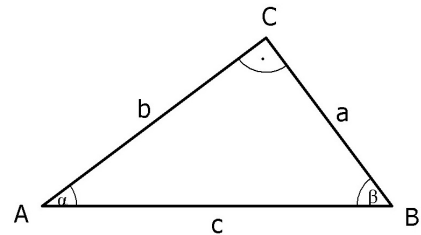
1. 5° 2. 30° 3. 45° 4. 60° 5. 90° 6. 120° 7. 180° 8. 270° 9. 360°

Zeichnen Sie die oben berechneten Winkel am Einheitskreis ein und bestimmen Sie den Sinus und Cosinus dieser Winkel näherungsweise aus der Zeichnung. Fertigen Sie eine Tabelle an.

Aufgabe 26: Dreiecke berechnen

Berechnen Sie die übrigen Größen im Dreieck. Berechnen Sie die Zahlenwerte der trigonometrischen Funktionen nur, falls sich daraus exakte Werte ergeben (z.B. $\sin(90^\circ) = 1$ oder $\sin(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}$).

- | | |
|-------------------------------|------------------------------------|
| 1. $\alpha = 30^\circ, c = 5$ | 4. $\alpha = \frac{\pi}{4}, b = 1$ |
| 2. $\alpha = 45^\circ, c = 8$ | 5. $\beta = \pi/6, b = b$ |
| 3. $b = 3, c = 5$ | 6. $\alpha = 60^\circ, b = b$ |



Aufgabe 27: Zerlegung vektorieller Größen

Fertigen Sie zur Lösung der folgenden Aufgaben Zeichnungen an.

- Ein Ball wird unter 45° mit 20 km/h abgeworfen. Bestimmen Sie die vertikale und horizontale Geschwindigkeitskomponenten. Was ergibt sich für einen Abwurfwinkel von 30° ?
- Ein Auto mit der Gewichtskraft $F_G = 10000N$ steht auf einer Straße mit 7% Gefälle (= 7m runter/100m geradeaus). Berechnen Sie Hangabtriebskraft und Normalkraft.
- Zwei Hunde ziehen jeweils mit der Kraft F unter einem Winkel von 20° einen Schlitten. Wie groß ist die resultierende Kraft? Geben Sie das Ergebnis für einen beliebigen Winkel α zwischen den Hunden an.
- Ein Flugzeug hat nach dem Start eine Geschwindigkeit von 500 km/h bei einem Steigwinkel von 10° . Berechnen Sie die Horizontal- und Vertikalkomponente der Geschwindigkeit.
- Dasselbe Flugzeug fliegt anschließend mit gleicher Geschwindigkeit in nord-nord-östlicher Richtung (22.5° von Nord abweichend). Wie lauten die Geschwindigkeitskomponenten in Nord-Süd- und Ost-West-Richtung?
- Zusatzfrage:* Wie groß sind die Geschwindigkeitskomponenten in diesen Richtungen, solange sich das Flugzeug noch im Steigflug befindet?

LOGARITHMEN UND TRIGONOMETRISCHE UMKEHRFUNKTIONEN

Aufgabe 28: Logarithmen

Wenden Sie die Definition des Logarithmus an und bestimmen Sie x .

1. $x = \log_7 49$

2. $x = \log_2 32$

3. $x = \log_4 16$

4. $x = \log_3 27$

5. $x = \log_9 81$

6. $x = \log_3 1$

7. $x = \log_{10} \frac{1}{10}$

8. $4^x = 64$

9. $3^x = \frac{1}{27}$

10. $\log_{10} x = 3$

11. $\log_{10} x = -2$

12. $\log_e x = 0$

Aufgabe 29: Logarithmen-Gesetze

Wenden Sie die Logarithmengesetze an und formen Sie um, falls möglich.

1. $\ln(a^4)$

2. $\ln(a^4 \cdot b)$

3. $\ln(3^b \cdot a^b)$

4. $\ln(a - b)$

5. $\ln\left(\frac{a^5}{b^5}\right)$

6. $3 \ln(a) + 5 \ln(a)$

7. $3 \ln(a) + c \ln(b)$

8. $3 \ln(\sqrt{a}) - \ln(a^{\frac{3}{2}})$

Aufgabe 30: Arcussinus und Arcuscosinus

Geben Sie alle Lösungen für x an. Bedenken Sie dabei die Periodizität der trigonometrischen Funktionen.

1. $\sin(x) = 0$

2. $\cos(x) = -1$

3. $\sin(x) = \frac{1}{5}$

4. $\sin(x) = 3 \cos(x)$

Aufgabe 31: Umkehrfunktionen

Zeichnen Sie jeweils die Exponential- und die (natürliche) Logarithmusfunktion, die Sinus- und die Arcussinusfunktion, die Cosinus- und die Arcuscosinusfunktion und schließlich die Tangens- und die Arcustangensfunktion in ein geeignetes Koordinatensystem. In welcher Beziehung stehen die Graphen beider Funktionen jeweils zueinander? Welcher Zusammenhang existiert zwischen den Graphen von $x \mapsto \arcsin(x)$ und $x \mapsto \arccos(x)$?

NOTIZEN
