

Theorie der Kondensierten Materie – Übungen

Problem 10 — Trotter-Zerlegung

Zeigen Sie die Gültigkeit der Trotter-Zerlegung

$$\exp(x(A + B)) = \exp(xA) \exp(xB) + \mathcal{O}(x^2)$$

für beliebige lineare Operatoren A und B ! x ist eine reelle Zahl.

Problem 11 — Zeitabhängiger Vernichter

Beweisen Sie (durch Taylor-Entwicklung von $f(\lambda) = e^{\lambda A} B e^{-\lambda A}$ um $\lambda = 0$), dass

$$e^{\lambda A} B e^{-\lambda A} = e^{-\lambda L_A} B$$

für zwei beliebige lineare Operatoren A, B , für $\lambda \in \mathbb{C}$ und $L_A(X) = [X, A]$!

Nutzen Sie dieses Resultat, um die Zeitabhängigkeit des Vernichters $c_\alpha(t)$ im Heisenberg-Bild zu berechnen. Nehmen Sie dazu an, dass der Hamilton-Operator ein Ein-Teilchen-Operator ist:

$$H = \sum_{\alpha\beta} t_{\alpha\beta} c_\alpha^\dagger c_\beta.$$

Gibt es hier Unterschiede zwischen Fermionen und Bosonen?

Problem 12 — Wick-Theorem

Betrachten Sie ein System von Spin-1/2-Fermionen. Die Ein-Teilchen-ONB ist $\{|\alpha\rangle\} = \{|i\sigma\rangle\}$. Berechnen Sie für $i \neq j$ die freien Erwartungswerte

$$\langle n_{i\uparrow} n_{i\downarrow} \rangle^{(0)} \quad \langle n_{i\uparrow} n_{j\uparrow} \rangle^{(0)} \quad \langle n_{i\uparrow} n_{j\downarrow} \rangle^{(0)} \quad \langle n_{i\sigma} n_{j\sigma'} n_{j\sigma''} \rangle^{(0)}$$

mit Hilfe des Wick-Theorems! Nehmen Sie dabei an, dass die Gesamtteilchenzahl und der Gesamtspin erhalten sind ($[\hat{N}, H_0]_- = 0$, $[S_z, H_0]_- = 0$)!