Condensed-Matter Theory - Special Topics

Problem 20 — Perron-Frobenius-Theorem für reelle, symmetrische Matrizen
Es sei H mit Elementen H_{ij} eine reelle und symmetrische (!) Matrix mit

$$H_{ij} \leq 0 \quad \forall i, j \, .$$

Es gelte zudem, dass ein R existiert, so dass für alle i, j eine Folge $(i_1, ..., i_R)$ gefunden werden kann mit $i_1 = i$ und $i_R = j$ und $H_{i_k i_{k+1}} \neq 0$ für $k = 1, ..., R-1$. Durch wiederholtes Anwenden von H werden also alle "Endzustände" i von allen "Startzuständen" j erreicht (Ergodizität).

Zeigen Sie das Perron-Frobenius-Theorem: Der kleinste Eigenwert λ_0 von H ist nicht entartet, und der zugehörige Eigenvektor $\boldsymbol{v}_0$ kann so gewählt werden, dass $v_i > 0$ für alle i.

a) Um das Theorem zu beweisen, betrachten Sie zunächst einen beliebigen Eigenvektor $\boldsymbol{u}$ mit $u_i \geq 0$ für alle i, und nehmen Sie an, dass $u_j = 0$ für ein j. Argumentieren Sie mit Hilfe der Eigenwertgleichung $\sum_k H_{jk} u_k = \lambda u_j$, dass dann auch $u_k = 0$ für alle k, die durch nichtverschwindende Matrixelemente $H_{jk} \neq 0$ mit j verbunden sind!

b) Es sei $\boldsymbol{u}$ ein beliebiger Eigenvektor von H zum Eigenwert λ. Weiter sei $u_i \geq 0$ für alle i. Begründen Sie mit der Ergodizitätseigenschaft und mit a), dass $u_i > 0$ für alle i.

c) Betrachten Sie jetzt einen normierten Eigenvektor $\boldsymbol{v}$ zum kleinsten Eigenwert λ_0. Definieren Sie den Vektor $\boldsymbol{u}$ durch $u_i = |v_i|$. Zeigen Sie, dass einerseits

$$\lambda_0 = \sum_{ij} v_i H_{ij} v_j \geq \sum_{ij} u_i H_{ij} u_j$$

und dass aber andererseits wegen des Ritz Prinzips

$$\lambda_0 = \sum_{ij} v_i H_{ij} v_j \leq \sum_{ij} u_i H_{ij} u_j$$

gelten muss, und schließen Sie, dass $H\boldsymbol{u} = \lambda_0 \boldsymbol{u}$! Argumentieren Sie mit b), dass $u_i > 0$ für alle i und dass $\lambda_0 < 0$!

d) Nehmen Sie an, dass λ_0 entartet ist, so dass zwei orthogonale Eigenvektoren zu λ_0 gefunden werden können, und zeigen Sie, dass diese Annahme zum Widerspruch führt!

Problem 21 — Stochastische und ergodische Matrizen
Gegeben ist eine reelle 2×2-Matrix:

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \, .$$

Welche Bedingungen müssen an a, b, c, d gestellt werden, damit $\boldsymbol{T}$ stochastisch ist?

Welche weiteren Bedingungen müssen an a, b, c, d gestellt werden, damit $\boldsymbol{T}$ ergodisch ist?

Ist das Perron-Frobenius-Theorem erfüllt?

Berechnen Sie (unter der Annahme, dass die Bedingungen erfüllt sind) $\boldsymbol{T}^{\infty}$!

Für den durch $\boldsymbol{T}$ beschriebenen Markov-Prozess: Welche Endkonfigurationen liegen mit welchen Wahrscheinlichkeiten vor, falls anfangs Konfiguration "1" mit Wahrscheinlichkeit p und Konfiguration "2" mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ vorliegt?

Was passiert, falls $\boldsymbol{T}$ nicht ergodisch ist?