Condensed-Matter Theory - Special Topics

Problem 18 — Keldysh-Matsubara-Contour

Gegeben ist ein Hamiltonian

$$H = H_0 + V(t) \, ,$$

mit

$$H_0 = \sum_{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} c^\dagger_\alpha c_\beta \quad V(t) = \sum_{\alpha\beta} V_{\alpha\beta}(t) c^\dagger_\alpha c_\beta \, .$$

H_0 ist nicht explizit zeitabhängig, und $V(t) = 0$ für $t \leq 0$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinde sich das System im thermischen Gleichgewicht.

Begründen Sie, dass für die Contour-geordnete Green-Funktion die folgende Gleichung gelten muss:

$$G_{\alpha\beta}(t,t') = G^{(0)}_{\alpha\beta}(t,t') + \int_C dt'' \sum_\gamma G^{(0)}_{\alpha\beta}(t,t'') V_\gamma(t'') G_{\alpha\beta}(t'',t') \; !$$

Zeigen Sie, dass die Zweige der Keldysh-Contour mit max$(t,t') < t'' < \infty$ nicht beitragen!

Drücken Sie das Contour-Integral durch gewöhnliche Integrale über

$$iG^>_{\alpha\beta}(t,t') \equiv \langle c_\alpha(t) c^\dagger_\beta(t') \rangle \, ,$$
$$iG^<_{\alpha\beta}(t,t') \equiv \varepsilon \langle c^\dagger_\beta(t') c_\alpha(t) \rangle$$

aus!

Problem 19 — Krylov space

Let H be the Hamiltonian of the system and $|u_0\rangle$ an arbitary "initial" state. Consider the following iterative construction of states $|u_k\rangle$:

$$|u_k\rangle = H|u_{k-1}\rangle - \sum_{i=0}^{k-1} P_{u_i} H |u_{k-1}\rangle$$

where

$P_{u_i}|\psi\rangle = |u_i\rangle\langle u_i|\psi\rangle / \langle u_i|u_i\rangle$ is a projector.

(a) Give an interpretation of this construction !

(b) Prove that $\{|u_0\rangle, |u_1\rangle, ..., |u_{n-1}\rangle\}$ is a set of mutually orthogonal states !

(c) Show that

$|u_{k+1}\rangle = H|u_k\rangle - a_k|u_k\rangle - b_k^2|u_{k-1}\rangle$

with $(k = 0, 1, ..., n-1)$:

$$a_k = \frac{\langle u_k|H|u_k\rangle}{\langle u_k|u_k\rangle} \qquad b_k^2 = \frac{\langle u_k|u_k\rangle}{\langle u_{k-1}|u_{k-1}\rangle} \qquad (b_0 = 0) \qquad !$$

(d) Define $|v_i\rangle = |u_i\rangle/\sqrt{\langle u_i|u_i\rangle}$. Show that $T_{ij} = \langle v_i|H|v_j\rangle$ is given by:

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} a_0 & b_1 & & & \\ b_1 & a_1 & b_2 & & \\ & b_2 & a_2 & \cdots & \\ & & \cdots & \cdots & b_{n-1} \\ & & & b_{n-1} & a_{n-1} \end{pmatrix} \qquad !$$