# Übungen zur Computational Physics

**Aufgabe 14 — SO(3)**
Betrachten Sie die Menge aller reellen orthogonalen $3 \times 3$-Matrizen mit Determinante eins:

$$SO(3) = \{A \mid AA^T = 1\,, \det A = 1\}\,.$$

a) Zeigen Sie, dass SO(3) eine Gruppenstruktur bezüglich der Matrizenmultiplikation besitzt!

b) Begründen Sie, dass sich jedes $A \in SO(3)$ in eindeutiger Weise durch 3 reelle Parameter charakterisieren lässt!

c) Sei eine Matrix $J$ gegeben, so dass $A = e^{\varphi J} \in SO(3)$ für alle $\varphi \in \mathbf{R}$. Zeigen Sie durch differenzieren bzgl. $\varphi$, dass $J$ antisymmetrisch sein muss: $J^T = -J$!

d) Zeigen Sie, dass die Matrizen

$$J_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad J_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad J_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

antisymmetrisch und spurlos sind!

e) Zeigen Sie, dass die Matrix $\boldsymbol{J\varphi}$ für beliebige reelle Vektoren $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z)^T$ antisymmetrisch ist!

f) Zeigen Sie, dass zu jeder antisymmetrischen Matrix $J$ ein Vektor $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z)^T$ existiert, so dass

$$J = \boldsymbol{J\varphi}\ !$$

g) Zeigen Sie, dass

$$[J_x, J_y] = J_z \qquad \text{(und zyklische Vertauschungen) !}$$

h) Zeigen Sie, dass für beliebige $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z)^T$ die Matrix

$$O = e^{\boldsymbol{J\varphi}}$$

orthogonal ist! Begründen Sie, dass umgekehrt jedes $O \in SO(3)$ von dieser Form sein muss!

i) Begründen Sie, dass Sp $\ln M = \ln \det M$ für beliebige Matrizen $M$, und nutzen Sie dies, um zu beweisen, dass $\det O = 1$!

j) Berechnen Sie:

$$O = e^{J_z \varphi_z}\ !$$

k) Gegeben seien $O_1 = e^{\boldsymbol{J\varphi}_1}$ und $O_2 = e^{\boldsymbol{J\varphi}_2}$. Zeigen Sie, dass

$$O_1 O_2 = O_2 O_1 + \mathcal{O}(\varphi^2)\ !$$