Übungen zur Computational Physics

Aufgabe 1 — Spin
Gegeben sind die Pauli-Matrizen

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Damit kann der Spin eines Elektrons als

$$\boldsymbol{S} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix}$$

dargestellt werden.

a) Zeigen Sie, dass $\sigma_i^2 = \mathbf{1}$ $(i = x, y, z)$! Zeigen Sie, dass $\mathrm{Sp}\,\sigma_i = 0$! Zeigen Sie, dass $\det \sigma_i = -1$!

b) Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{S}$ hermitesch ist! Berechnen Sie die Eigenwerte von S_x, von S_y und von S_z!

c) Zeigen Sie, dass $[S_x, S_y] = i\hbar S_z$! Gibt es eine unitäre Matrix U, so dass $U\boldsymbol{S}U^\dagger$ ein Vektor von diagonalen 2×2-Matrizen ist?

d) Berechnen Sie $\exp(-i\varphi\hbar\sigma_y/2)$ für einen beliebigen Winkel φ!

e) Der Spinzustand eines Elektrons sei durch $|\Psi\rangle = (\cos\alpha, \sin\alpha)^T$ gegeben! Ist $|\Psi\rangle$ normiert? Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird bei einer Messung von S_x der Wert $-\hbar/2$ gemessen? Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird bei einer direkt anschließenden Messung von S_z der Wert $\hbar/2$ gemessen?

Aufgabe 2 — Impulsoperator in Ortsdarstellung
Begründen Sie, dass die x-Komponente des Impulsoperators in Ortsdarstellung folgendermaßen auf Wellenfunktionen wirkt:

$$\hat{p}_x|\varphi\rangle \leftrightarrow -i\hbar\frac{d}{dx}\varphi(\boldsymbol{r})$$

Zeigen Sie dazu zunächst, dass

$$\delta(x) = -x\delta'(x)$$

und

$$\langle\boldsymbol{r}|\hat{p}_x|\boldsymbol{r}'\rangle = -i\hbar\delta'(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')\,!$$