Übungen zur Klassischen Feldtheorie

Aufgabe 39 — Modifiziertes Hamilton-Prinzip
Für ein mechanisches System mit f Freiheitsgraden und Hamilton-Funktion $H(q,p,t)$ wird das folgende modifizierte Wirkungsfunktional definiert:

$$S[q(t),p(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_{n=1}^{f} p_n \dot{q}_n(q,p,t) - H(q,p,t) \right) \ .$$

Zeigen Sie, dass die Stationaritätsbedingung

$$\delta S[q(t),p(t)] = 0$$

auf die Hamiltonschen kanonischen Gleichungen führt!

Welche Randbedingungen muss man dazu an die Variation der Phasentrajektorie $(q(t),p(t))$ stellen?

Aufgabe 40 — Poisson-Klammer-Algebra
Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften der Poisson-Klammer für beliebige Zustandsfunktionen A, A_1, A_2, B, C und beliebige reelle Zahlen c_1, c_2, c:

a) $\{A,B\} = -\{B,A\}$

b) $\{c_1A_1 + c_2A_2, B\} = c_1\{A_1,B\} + c_2\{A_2,B\}$

c) $\{A,BC\} = B\{A,C\} + \{A,B\}C$

d) $\{A,\{B,C\}\} + \{B,\{C,A\}\} + \{C,\{A,B\}\} = 0$

Aufgabe 41 — Formale Lösung der dynamischen Grundgleichung
Gegeben sei eine nicht explizit zeitabhängige Observable A. Ihre zeitliche Entwicklung ist dann bestimmt durch

$$\frac{d}{dt}A(t) = \{A,H\} \ .$$

a) Schreiben Sie d^2A/dt^2 als zweifach verschachtelte Poisson-Klammer!

b) Verallgemeinern Sie auf d^nA/dt^n !

Es sei mit

$$\mathcal{L}A = \{A,H\}$$

die sogenannte Liouville-Operation definiert.

c) Zeigen Sie, dass die n-fache Anwendung von $\mathcal{L}$ auf A gegeben ist durch:

$$\mathcal{L}^n A = \frac{d^n A}{dt^n} \qquad !$$

d) Entwickeln Sie $A(t)$ in eine Taylor-Reihe, und schreiben Sie den Term n-ter Ordnung mit Hilfe des Resultats von c)!

e) Zeigen Sie so, dass:

$$A(t) = \exp(t\mathcal{L})A(0) \qquad !$$

Aufgabe 42 — Lenzscher Vektor - 1
Ein Teilchen bewege sich unter dem Einfluss eines sphärisch symmetrischen Potenzials:

$$V(r) = V(|\boldsymbol{r}|) \; .$$

Der Lenzsche Vektor ist definiert als:

$$\boldsymbol{A} = \dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{l} + V(r)\,\boldsymbol{r} \; ,$$

mit $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$. Zeigen Sie mithilfe der Newtonschen Bewegungsgleichung, dass $\boldsymbol{A}$ dann und nur dann eine Erhaltungsgröße ist, falls $V(r) \propto 1/r$!

Aufgabe 43 — Lenzscher Vektor - 2
Betrachten Sie das Kepler-Problem:

$$H = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} - \frac{\alpha}{r} \; ,$$

und zeigen Sie ausschließlich durch Berechnung von Poisson-Klammern, dass

$$\boldsymbol{A} = \dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{l} + V(r)\,\boldsymbol{r}$$

eine Erhaltungsgröße ist! Zeigen Sie dazu zunächst, dass:

a)

$$\{\frac{\boldsymbol{r}}{r}, \frac{1}{r}\} = 0 \; ,$$

b)

$$\{\boldsymbol{p} \times (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}), \boldsymbol{p}^2\} = 0 \; ,$$

c)

$$\{\frac{\boldsymbol{r}}{r}, \boldsymbol{p}^2\} = 2\,\frac{r^2\boldsymbol{p} - (\boldsymbol{r}\boldsymbol{p})\boldsymbol{r}}{r^3} \; ,$$

d)

$$\{\boldsymbol{p} \times (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}), \frac{1}{r}\} = \frac{(\boldsymbol{r}\boldsymbol{p})\boldsymbol{r} - r^2\boldsymbol{p}}{r^3} \; ,$$

indem Sie die Relationen $\{x_i, \cdot\} = (\partial/\partial p_i)\cdot$ und $\{p_i, \cdot\} = -(\partial/\partial x_i)\cdot$ (mit $i \in \{x, y, z\}$), sowie Antisymmetrie und Linearität der Poisson-Klammer und die Produktregel benutzen!

Drücken Sie jetzt $\boldsymbol{A}$ durch $\boldsymbol{r}$ und den kanonisch konjugierten Impuls $\boldsymbol{p}$ aus, und zeigen Sie mithilfe von a) - d), dass

$$\{\boldsymbol{A}, H\} = 0\ !$$