Übungen zur Klassischen Feldtheorie

Aufgabe 31 — Beschleunigtes Bezugssystem

Betrachten Sie ein konservatives $N = 1$-Teilchen-System ohne Zwangsbedingungen. Fassen Sie den Übergang von einem Inertialsystem IS (Ort $\boldsymbol{r}$, Zeit t) auf ein beschleunigtes Bezugssystem BS (Ort $\boldsymbol{r}'$, Zeit t) mit

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{d}(t)$$

und beliebig zeitabhängigen Vektor $\boldsymbol{d}(t)$ als eine Punkttransformation

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}', t)$$

auf!

a) Geben Sie $L(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t)$ an, und stellen Sie die Lagrange-Gleichungen auf!
b) Bestimmen Sie jetzt $L'(\boldsymbol{r}', \dot{\boldsymbol{r}}', t)$ durch Transformation aus $L(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t)$! Ist L' explizit zeitabhängig?
c) Stellen Sie die Lagrange-Gleichungen für L' auf und interpretieren Sie diese!

Aufgabe 32 — Zylinderkoordinaten

a) Geben Sie die Transformationsformeln von für den Übergang von kartesischen (x, y, z) in Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) an!

b) Drücken Sie den Ortsvektor $\boldsymbol{r}$ durch $\boldsymbol{e}_\rho, \boldsymbol{e}_\varphi, \boldsymbol{e}_z$ aus!

c) Geben Sie die kinetische Energie eines Teilchens in Zylinderkoordinaten an!

d) Geben Sie den Drehimpuls eines Teilchens in Zylinderkoordinaten an! Wie vereinfacht sich das Resultat bei einer Bewegung in der $z = 0$-Ebene?

Aufgabe 33 — Teilchen in zylindersymmetrischem Potenzial

Ein Teilchen der Masse m bewege sich unter dem Einfluss einer konservativen Kraft mit zylindersymmetrischem Potenzial

$$U(x, y, z) = \frac{1}{2} k(x^2 + y^2)\,.$$

a) Benutzen Sie Zylinderkoordinaten, und stellen Sie die Lagrange-Funktion auf!

b) Welche Koordinaten sind zyklisch? Geben Sie die zugehörigen Erhaltungsgrößen an! Welche physikalische Bedeutung haben die Erhaltungsgrößen?

c) Leiten Sie die Lagrange-Gleichungen in den nicht-zyklischen Koordinaten ab! Nutzen Sie die gefundenen Erhaltungsgrößen zur deren Vereinfachung!

d) Begründen Sie, dass der Energieerhaltungssatz gelten muss, und geben Sie die Gesamtenergie in Zylinderkoordinaten an! Nutzen Sie die Erhaltungssätze von oben aus, um den Ausdruck für die Gesamtenergie zu vereinfachen!

e) Wie groß ist die minimale Energie des Teilchens für gegebene z-Komponente des Drehimpulses, falls es sich z.Zt. $t = 0$ in der $z = 0$-Ebene befindet und $p_z = 0$ ist?

Aufgabe 34 — Erhaltungsgröße Drehimpuls
Drehimpulse sind immer bezüglich eines Ursprungs definiert.

Was kann man aus der Tatsache ableiten, dass für ein isoliertes N-Teilchen-System der Gesamtdrehimpuls bezogen auf *jeden beliebigen* Ursprung eine Erhaltungsgröße darstellt?